ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Звягин
Андрей Викторович

Исследование математических моделей движения растворов полимеров с субстациональной и объективной производными

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Орлов В.П.

Воронеж 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список обозначений 4

ВВЕДЕНИЕ 6

ГЛАВА 1 СТАЦИОНАРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ СЛАБО КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ 14

1.1 Существование слабых решений стационарной математической модели с полной производной в реологическом соотношении . . . 14

1.1.1 Аппроксимационная задача 15

1.1.2 Априорная оценка 21

1.1.3 Существование решений аппроксимационной задачи 24

1.1.4 Доказательство теоремы 1.1.1 25

1.1.5 Случай с неограниченной областью. 27

1.2 Задача оптимального управления для стационарной модели с полной производной в реологическом соотношении 29

1.2.1 Аппроксимационная задача 31

1.2.2 Существование решений аппроксимационной задачи 33

1.2.3 Доказательство теоремы 1.2.1 34

1.2.4 Доказательство теоремы 1.2.3 36

1.3 Существование слабых решений стационарной математической модели с объективной производной в реологическом соотношении 38

1.3.1 Аппроксимационная задача 39

1.3.2 Априорная оценка 43

1.3.3 Существование решений аппроксимационной задачи 45

1.3.4 Доказательство теоремы 1.3.1 46

1.3.5 Случай с неограниченной областью 49

1.4 Задача оптимального управления для стационарной модели с объективной производной в реологическом соотношении 52

1.4.1 Аппроксимационная задача 53

1.4.2 Доказательство теоремы 1.4.1 56

1.4.3 Доказательство теоремы 1.4.2 58

ГЛАВА 2 ЭВОЛЮЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ СЛАБО КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ 60

2.1 Существование слабых решений эволюционной математической модели с объективной производной в реологическом соотношении 60

2.1.1 Аппроксимационная задача 63

2.1.2 Априорная оценка 72

2.1.3 Теорема существования решения аппроксимационной задачи . 79

2.1.4 Доказательство теоремы 2.1.1 80

2.2 Задача оптимального управления для эволюционной математической модели, описывающей движение слабо концентрированных растворов полимеров 88

2.2.1 Аппроксимационная задача 90

2.2.2 Априорная оценка 92

2.2.3 Теорема существования решения аппроксимационной задачи . 93

2.2.4 Доказательство теоремы 2.2.1 94

2.2.5 Доказательство теоремы 2.2.2 98

ГЛАВА 3 АТТРАКТОРЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ СЛАБО КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ 100

3.1 Постановка задачи и основные результаты 100

3.2 Аппроксимационная задача 105

3.3 Априорные оценки 114

3.4 Существование решений 120

3.5 Доказательство теорем 3.1.6 и 3.1.7. 133

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 136

Список использованных источников 136

Публикации автора по теме диссертации 138

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с локально–липшицевой границей $\partial\Omega$.

$L_p(\Omega)$ — множество всех измеримых функций $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \big(\int_\Omega |v(x)|^p dx\big)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

$W_p^s(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций, принадлежащих $L_p(\Omega)$ вместе со всеми своими обобщенными производными порядка не выше чем s.

$L_p(0, T; X)$ — множество всех измеримых функций $v : [0, T] \to X$, принимающих значение в банаховом пространстве X, для которых конечна норма

$$\|v\|_{L_p(0,T;X)} = \begin{cases} \big(\int_0^T \|v(x)\|_X^p dt\big)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \|v(x)\|_X, & p = \infty. \end{cases}$$

$W_p^s(0, T; X)$ — пространство Соболева, состоящее из функций $v : [0, T] \to X$, которые принадлежат $L_p(0, T; X)$ вместе со всеми своими обобщенными производными порядка s включительно.

$\mathfrak{D}(\Omega)^n$ — пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω.

$\mathcal{V}$ $= \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$— подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega)^n$.

H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)^n$.

V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$ с нормой

$$\|v\|_V = \Big(\int_\Omega \nabla v : \nabla v \, dx\Big)^{1/2}.$$

X — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^3(\Omega)^n$ с нормой

$$\|v\|_X = \Big(\int_\Omega \nabla\Delta v : \nabla\Delta v\, dx\Big)^{1/2}.$$

$A : B$ $= \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$, где $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$. Символ обозначает покомпонентное умножение матриц.

E^* — пространство сопряженное к пространству E.

$\langle f, v\rangle$ — значение функционала $f \in E^*$ на элементе $v \in E$.

$\mathrm{Div}\ A$ $= (\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{1j}(t,x)}{\partial x_j}, ..., \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{nj}(t,x)}{\partial x_j})$ — дивергенция тензора A.

σ $= (\sigma_{ij})$ – девиатор тензора напряжений.

$\mathcal{E}(v)$ $= (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i})$ — тензор скоростей деформации.

$W(v)$ $= (W_{ij}(v))$, $W_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i})$ — тензор завихренности.

$W_\rho(v)$ $= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)W(t,y)\, dy$, где $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами.

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамика издавна была источником постановки серьезных математических задач, при решении которых как создавались новые, так совершенствовались старые, классические математические методы. При этом основным объектом исследования для математиков являлись, как правило, краевые и начально-краевые задачи для системы уравнений Навье–Стокса. Самыми известными работами по данной тематике является статья Ж. Лере [22] и монографии [8], [10], [14].

Тем не менее, в последние годы внимание математиков обращено на то, что многие реальные среды, такие как битумы, полимеры, различные полимерные растворы и расплавы, эмульсии и суспензии, кровь и многие другие, не описываются моделями классической (ньютоновской) гидродинамики, хотя они по многим признакам близки к жидкостям. Такие объекты получили название «неньютоновские жидкости». «Неньютоновскими» являются, например, жидкости, в которых после прекращения движения напряжения не обращаются мгновенно в нуль, а спадают по некоторому закону, то есть имеет место релаксация напряжений. А также жидкости, в которых после снятия напряжений движение не прекращается мгновенно, а затухает по некоторому закону, то есть имеет место запаздывание деформаций. Впервые подобные модели жидкостей были предложены в XIX веке в работах Дж. Максвелла, Кельвина и Фойгта и были развиты в середине XX века в значительной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройта. В настоящее время уже имеется большое число моделей, описывающих разные классы таких сред. К несомненным достоинствам данных моделей следует отнести тот факт, что они учитывают предысторию течения жидкости, что позволяет им быть более точными, по сравнению с моделями классической гидродинамики.

Данная диссертация посвящена исследованию краевых и начально–краевых задач для одной модели неньютоновской гидродинамики, а именно, модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров. Отметим, что данной математической моделью занималось большое число известных ученых: Дж. Г. Олдройт, К. Трусделл, А. П. Осколков, В. А. Павловский, G. P. Galdi, E. S. Titi, J. Malek и др.

В работе рассматриваются также краевые и начально–краевые задачи для моделей с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности.

Движение однородной несжимаемой жидкости с постоянной плотностью, в ограниченной области на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши (см., например, [4]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \text{grad } p = \text{Div } \sigma + f, \tag{0.1}$$

$$\text{div } v = 0, \tag{0.2}$$

где $v = (v_1, ..., v_n)$ – скорость, p – давление жидкости, f – плотность внешних сил.

Формально система (0.1)–(0.2) описывает течение всех видов жидкостей. Однако, число неизвестных этой системы больше числа уравнений. Для корректной постановки задачи эту систему дополняют реологическим соотношением, которое обычно связывает между собой девиатор тензора напряжения σ и тензор скоростей деформации $\mathcal{E}$. Один из способов определения реологического соотношения – это метод механических моделей. Рассматриваемую среду моделируют с помощью пробирок, пружинок и т.д. и производят необходимые вычисления. Разумеется, разные среды имеют разные механические модели и в результате расчетов получаются различные соотношения. Однако данный метод не указывает какую производную (частную, полную или какую-то специальную) надо брать в реальных процессах, где наряду со временем участвуют и точки области.

В последние годы под влиянием идей рациональной механики стали интересоваться такими реологическими соотношениями, которые не зависят от наблюдателя, т.е. не меняются при галилеевой замене переменных:

$$t^* = t + a \tag{0.3}$$

$$x^* = x_0^*(t) + Q(t)(x - x_0), \tag{0.4}$$

где a – некоторое значение времени, x_0 – некоторая точка в пространстве, x_0^* – некоторая функция времени со значениями в точках пространства, а Q –

некоторая функция времени со значениями в множестве ортогональных тензоров. Это оказалось связанным с использованием объективной производной.

Определение 0.1. *Пусть $T(t,x)$ – произвольная тензорнозначная функция, не зависящая от наблюдателя. Оператор вида*

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + G(\nabla v(t,x), T(t,x)),$$

где G – некоторая матричнозначная функция двух матричных аргументов, называется объективной производной, если при любом изменении системы отсчета (0.3)–(0.4) выполнено равенство

$$\frac{DT^*(t^*,x^*)}{Dt^*} = Q(t)\frac{DT(t,x)}{Dt}Q(t)^T,$$

где $T^*(t^*,x^*) = Q(t)T(t,x)Q(t)^T$, для всех возможных функций T.

Если рассмотреть исследуемое реологическое соотношение с объективной производной, то полученное реологическое соотношение будет удовлетворять принципу объективности. Принцип объективности утверждает, что формулы, выражающие физические свойства тела и содержащие время t, точку x и их различные функции не должны меняться при преобразованиях (0.3)–(0.4).

Математическая модель движения растворов полимеров возникла при изучении жидкостей типа Кельвина–Фойгта. В таких жидкостях равновесное состояние устанавливается не мгновенно после изменения внешних условий, а с некоторым запаздыванием, которое характеризуется значением времени релаксации. Это запаздывание объясняется процессами внутренней перестройки (например, связанными с магнитными свойствами жидкости). Группа ученых из Санкт–Петербурга провела эксперименты и доказала, что именно данная математическая модель описывает течение слабо концентрированных водных растворов полимеров, например, растворов полиэтиленоксида, полиакриламида, полиакриламида, гуаровой смолы ([1], [13]).

Для учета релаксационных свойств было предложено реологическое соотношение, в которое входит производная:

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\varkappa\dot{\mathcal{E}}, \tag{0.5}$$

где $\nu > 0$ – вязкость жидкости, $\varkappa > 0$ – время ретардации (запаздывания), а $\dot{\mathcal{E}}$ – производная по времени тензора скоростей деформации.

Математические исследования данной модели начались с рассмотрением в реологическом соотношении частной производной. Затем А.П. Осколковым был рассмотрен случай некоторого упрощения полной производной [12]. Но позднее О.А. Ладыженская обнаружила ошибки в некоторых своих результатах [9], которые использовал Осколков А.П., и в последующем в монографиях [6], [7] было дано полное доказательство существования слабых решений исследуемой математической модели с полной производной в реологическом соотношении.

Однако в последнее время все чаще стал подниматься вопрос: удовлетворяет ли рассматриваемое реологическое соотношение принципу объективности. На сегодняшний день все больше специалистов в области математической гидродинамики сходятся во мнении, что математические модели, реологические соотношения которых не удовлетворяют принципу объективности, не физичны. Поэтому в настоящей работе предпринята попытка исследования рассматриваемой модели с регуляризованной объективной производной Яуманна:

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + T(t,x)W_\rho(t,x) - W_\rho(t,x)T(t,x),$$

в реологическом соотношении.

Модели с объективной производной особенно сложны для изучения и на настоящее время с точки зрения математических исследований мало изучены (имеется только небольшое количество математических работ, посвященных таким моделям, большая часть из которых посвящена исследованию либо стационарных моделей, либо для эволюционных уравнений при малых данных, что несколько упрощает задачу). В качестве примера работ, посвященных изучению таких моделей, можно привести статьи [19],[20],[23],[27]. При этом именно такие модели наиболее точно описывают поведение среды и именно их исследование является наиболее актуальным.

Стоит отметить, что исследование математических проблем для данных моделей представляет большой интерес в механике, медицине, полимерной промышленности и других. Надо заметить, что реологическое соотношение для модели движения полимеров с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности, является частным случаем реологическо-

го соотношения для жидкостей второго порядка (русская терминология еще не устоялась, английское название «second grade fluids»). Данные жидкости описываются очень сложными системами уравнений, но до сих пор большого числа результатов для них не удалось получить, только установлены некоторые теоремы существования для локальных случаев или при малых данных (см. [17], [18]).

Также в диссертации исследуются задачи оптимального управления с обратной связью. Заметим, что задачам оптимального управления в механике жидкости посвящено большое число работ (см., [15]). Однако, большинство из них посвящены различным задачам оптимального управления для системы Навье–Стокса. И лишь в малом числе работ рассматриваются задачи для неньютоновских жидкостей, в том числе и задачи с обратной связью для подобных моделей движения жидкости (см., например, [24]).

Еще одним важным объектом исследования в диссертации является задача о существовании аттракторов. Заметим, что классическая теория аттракторов динамических систем выросла из теории устойчивости и применялась первоначально к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений. Значительное время потребовалось для того, чтобы модифицировать эту теорию, так чтобы она стала применимой к уравнениям с частными производными. И это было сделано в работах О. А. Ладыженской, А. В. Бабина и М. И. Вишика, Р. Темама и др. математиков. Во многих задачах ньютоновской и неньютоновской гидродинамики классический подход оказался неприменим. Дело в том, что корректное определение оператора сдвига требует существования и единственности решения уравнения, выходящего из каждой точки фазового пространства и определенного на всей неотрицальной полуоси. В то же время уже для трехмерной системы Навье–Стокса не установлено ни существование глобального сильного решения, ни единственность слабого, так что построить динамическую систему не удается. В обход указанных трудностей возникла теория траекторных аттракторов, позволяющая строить глобальные аттракторы для ряда эволюционных уравнений. Эта теория была предложена российскими учеными М. И. Вишиком и В. В. Чепыжовым [16] и независимо американским ученым G. Sell [25], а впоследствии была усовершенствована с целью применения в задачах неньютоновской гидродинамики

в [29]. Использование последнего подхода и предполагается в данной работе.

Приведем краткий обзор содержания диссертации по главам.

Первая глава состоит из четырех пунктов. В первом пункте исследуется слабая разрешимость краевой задачи, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров, с полной производной в реологическом соотношении, как в ограниченной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, так и в произвольной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. В обоих случаях доказывается существование слабого решения исследуемой краевой задачи. Во втором пункте исследуется задача оптимального управления с обратной связью для краевой задачи, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров, с полной производной в реологическом соотношении. Доказывается существование слабого решения данной задачи, дающего минимум заданному ограниченному, полунепрерывному снизу функционалу качества. В третьем пункте исследуется слабая разрешимость краевой задачи, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров, с объективной производной в реологическом соотношении, как в ограниченной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, так и в произвольной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. В обоих случаях доказывается существование слабого решения исследуемой краевой задачи. В четвертом пункте исследуется задача оптимального управления с обратной связью для краевой задачи, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров, с объективной производной в реологическом соотношении. Доказывается существование слабого решения данной задачи, дающего минимум заданному ограниченному, полунепрерывному снизу функционалу качества.

Во второй главе исследуется начально–краевая задача, описывающая движение слабо концентрированных водных растворов полимеров, с объективной производной в реологическом соотношении. Доказывается существование слабых решений исследуемой задачи в ограниченной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Также рассматривается задача оптимального управления с обратной связью для начально–краевой задачи, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров, с объективной производной в реологическом соотношении и доказывается существование слабого решения данной задачи, дающего минимум заданному ограниченному, полунепрерыв-

ному снизу функционалу качества.

Третья глава посвящена исследованию существования аттракторов для математической модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров, с объективной производной в реологическом соотношении. Доказывается существование минимального траекторного и глобального аттракторов для данной модели.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на международных математических школах: «Mathematical models in the manufacturing of glass, polymers and textiles» (Монтекатими Терме, Италия 2008), «20ая Крымская Осенняя Математическая Школа–Симпозиум» (Ласпи–Батилиман, Украина 2009), «Multiscale and adaptivity: modeling, numerics and applications» (Четраро, Италия 2009), «Mathematical fluid dynamics» (Левико Терме, Италия 2012), «Vector–valued partial differential equations and applications» (Четраро, Италия 2013); на международных конференциях: «Геометрия Банаховых Пространств» (Санкт-Петербург, Россия 2010), «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, Россия 2011), «Дифференциальные и функционально–дифференциальные уравнения» (Москва, Россия 2011, 2014), «Analysis, topology and applications» (Харбин, Китай 2011), «Крымская международная математическая конференция (КММК-2013)» (Судак, Украина 2013), «10th Euromech Fluid Mechanics Conference» (Копенгаген, Дания 2014); на международных конгрессах: «6th European Congress of Mathematics» (Краков, Польша 2012), «International Congress of Mathematicians» (Сеул, Корея 2014); на семинарах НИИ математики (ВГУ, 2012–2014); на семинаре под руководством профессора А. Г. Баскакова (ВГУ, 2011); на научных сессиях ВГУ (2011–2014).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны грантами РФФИ № 12–01–09253–моб_з (руководитель А. В. Звягин, 2012 г.), № 14–01–31228–мол_а (руководитель А. В. Звягин, 2014–2015 гг.) № 12–01–31188–мол_а (руководитель к.ф.-м.н. М. В. Турбин, 2012–2013 гг.), № 13–01–00041 (руководитель проф. В. Г. Звягин, 2013–2015 гг.), № 14–01–92004 ННС_а (руководитель проф. В. В. Обуховский, 2014–2016), Минобрнауки «Экспериментальные и теоретические исследования пространственно–временной изменчивости океанографических условий на шельфе и ее влияния на распростра-

нение низкочастотного звука» (руководитель проф. Б.Г. Кацнельсон 2009–2011 гг.), Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (проект № 1.1539.2014/K, руководитель проф. В. Г. Звягин, 2014–2016 гг.), федеральной целевой программой «Научные и научно–педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (госконтракт № П941, руководитель проф. В. Г. Звягин 2009–2011 гг.), программой стратегического развития Воронежского государственного университета ПСР–МГ/05–13 (руководитель А. В. Звягин, 2013–2014 гг.), РНФ «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований коллективами существующих научных лабораторий (кафедр)» (проект № 14–21–00066, руководитель проф. В. Г. Звягин 2014–2016 гг.).

Автор признателен своему научному руководителю профессору В. П. Орлову и доценту М. В. Турбину за обсуждение результатов диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [30]–[39], из них [30]–[36], [38]–[39] соответствуют перечню ВАК для кандидатских диссертаций.

ГЛАВА 1
СТАЦИОНАРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ СЛАБО КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

1.1 Существование слабых решений стационарной математической модели с полной производной в реологическом соотношении

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. Рассматривается следующая краевая задача:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - 2\varkappa \mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) + \mathrm{grad}\, p = f, \quad x \in \Omega; \tag{1.1.1}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad x \in \Omega; \qquad v|_{\partial\Omega} = 0; \tag{1.1.2}$$

где $v(x)$ – вектор–функция скоростей в точке области Ω пространства $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$; $p(x)$ – функция давления; $f(x)$ – плотность внешних сил; $\nu > 0$ – кинематический коэффициент вязкости, а $\varkappa > 0$ – время запаздывания (время релаксации деформаций).

Определение 1.1.1. *Пусть $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи (1.1.1)–(1.1.2) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in X$ равенству:*

$$\nu \int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx -$$

$$- \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \langle f, \varphi \rangle. \tag{1.1.3}$$

Основным результатом текущего параграфа является следующая теорема:

Теорема 1.1.1. *Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ и $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача (1.1.1)–(1.1.2) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.*

Доказательство теоремы 1.1.1 основано на рассмотрении семейства аппроксимационных задач, доказательстве их разрешимости и последующем предельном переходе.

1.1.1 Аппроксимационная задача

Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу с малым параметром:

Задача 1.1.1. *Пусть $f \in V^*$. Найти функцию $v \in X$, удовлетворяющую для любого $\varphi \in X$ равенству:*

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.1.4)$$

Здесь ε – некоторое фиксированное положительное число.

Для исследования аппроксимационной задачи перейдем к операторной трактовке. Определим операторы A, N, B_1, B_2, B_3 с помощью следующих равенств:

$$A : V \to V^*, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx, \quad v, \varphi \in V;$$

$$N : X \to X^*, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx, \quad v, \varphi \in X;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n,\ \varphi \in V;$$

$$B_2 : V \to X^*, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V,\ \varphi \in X;$$

$$B_3 : V \to X^*, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V,\ \varphi \in X.$$

Замечание 1.1.1. *Заметим, что V плотно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для n=2,3, значит B_1 можно рассматривать и как отображение $B_1 : V \to V^*$, а поскольку X вложено в V, то операторы A, B_i, $i = 1, 2, 3$, можно рассматривать и как отображения $A, B_1, B_2, B_3 : X \to X^*$. При этом, чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, определенных одной и той же формулой, но действующих в разных функциональных пространствах, когда из контекста ясно, в каких функциональных пространствах действуют операторы в данном месте текста.*

В силу произвольности $\varphi \in X$ в задаче 1.1.1 равенство (1.1.4) эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\varepsilon N v + \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) = f. \tag{1.1.5}$$

Таким образом, каждое решение задачи 1.1.1 является решением операторного уравнения (1.1.5) и обратно.

Введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L_\varepsilon : X \to X^*, \quad L_\varepsilon(v) = \varepsilon N v;$$
$$K : X \to X^*, \quad K(v) = \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v).$$

В этих обозначениях уравнение (1.1.5) записывается в виде:

$$L_\varepsilon(v) + K(v) = f. \tag{1.1.6}$$

Для дальнейшего нам необходимо исследовать свойства операторов $A, L_\varepsilon, B_1, B_2, B_3, K$.

Лемма 1.1.1. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $A : V \to V^*$ – непрерывен и для него имеет место оценка:*

$$\|Av\|_{V^*} \leqslant \|v\|_V. \tag{1.1.7}$$

2. *Оператор $A : X \to X^*$ – вполне непрерывен.*

Доказательство. 1) Достаточно показать ограниченность линейного оператора A. По определению имеем

$$|\langle Av, \varphi\rangle| = \left| \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx \right| \leqslant \|v\|_V \|\varphi\|_V.$$

Отсюда и следует неравенство (1.1.7) и непрерывность оператора A.

2) Докажем вполне непрерывность оператора A, действующего из X в X^*. Из первого пункта этой леммы имеем, что оператор $A : V \to V^*$ – непрерывен, а в композиции отображений $X \subset V \xrightarrow{A} V^* \subset X^*$ первое вложение вполне непрерывно. Учитывая, что отображение A и последнее вложение непрерывны, получаем, что отображение $A : X \to X^*$ – вполне непрерывно. □

Лемма 1.1.2. *Оператор $L_\varepsilon = \varepsilon N : X \to X^*$ – непрерывен, обратим и для него имеет место оценка:*

$$||L_\varepsilon v||_{X^*} = ||(\varepsilon N)v||_{X^*} \leqslant \varepsilon \|v\|_X. \tag{1.1.8}$$

Кроме того, обратный оператор $L_\varepsilon^{-1} = (\varepsilon N)^{-1} : X^* \to X$ – непрерывен.

Доказательство. В силу линейности оператора L_ε для доказательства его непрерывности достаточно показать его ограниченность. Имеем

$$|\langle (\varepsilon N)v, \varphi\rangle| = \left| \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi) dx \right| \leqslant \ \varepsilon \|v\|_X \|\varphi\|_X.$$

Отсюда и следует оценка (1.1.8). Таким образом оператор $L_\varepsilon : X \to X^*$ ограничен и, следовательно, непрерывен.

Для доказательства обратимости воспользуемся проекционной теоремой из [14] (стр. 28). Приведем её формулировку:

Теорема 1.1.2. *(Проекционная теорема) Пусть W – сепарабельное вещественное гильбертово пространство (с нормой $\|\cdot\|_W$), и пусть $a(u, v)$ – непрерывная билинейная форма на $W \times W$, которая коэрцитивна, т.е. существует $\alpha > 0$, такое что*

$$a(u, u) \geqslant \alpha \|u\|_W^2 \qquad \forall u \in W.$$

Тогда для каждого l из W^* – пространства, сопряженного к W, – существует один и только один элемент $u \in W$, такой что

$$a(u, v) = \langle l, v\rangle \qquad \forall v \in W.$$

Для того чтобы применить данную теорему достаточно показать, что непрерывная билинейная форма

$$a(u,v) = \langle(\varepsilon N)u, v\rangle = \varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta v)\, dx$$

коэрцитивна.

Действительно, для любого $v \in X$ имеем, что

$$a(v,v) = \langle(\varepsilon N)v, v\rangle = \varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v)\, dx = \varepsilon\|v\|_X^2 \geqslant \varepsilon\|v\|_X^2, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.1.9}$$

Отсюда следует, что $L_\varepsilon : X \to X^*$ — изоморфизм.

Итак, имеем линейный непрерывный оператор εN, который отображает все банахово пространство X на все банахово пространство X^* взаимно-однозначно. Отсюда по теореме Банаха следует, что существует линейный непрерывный оператор L_ε^{-1}, обратный оператору L_ε, отображающий X^* на X. □

Лемма 1.1.3. *Для отображения B_1 имеют место следующие свойства:*

1. *Отображение $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*$ – непрерывно и для него имеет место оценка:*

$$\|B_1(v)\|_{V^*} \leqslant C_0\|v\|^2_{L_4(\Omega)^n}. \tag{1.1.10}$$

2. *Для любой функции $v \in X$ функция $B_1(v) \in X^*$ и отображение $B_1 : X \to X^*$ – вполне непрерывно.*

Доказательство. 1) Для любых $v \in L_4(\Omega)^n, \varphi \in V$ имеем

$$|\langle B_1(v), \varphi\rangle| \leqslant \left| \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\, dx \right| \leqslant C_0\|v\|^2_{L_4(\Omega)^n}\|\varphi\|_V,$$

откуда и следует, что

$$\|B_1(v)\|_{V^*} \leqslant C_0\|v\|^2_{L_4(\Omega)^n}$$

с некоторой константой C_0.

Покажем непрерывность отображения $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*,\ v \mapsto B(v)$. Для произвольных $v^m, v^0 \in L_4(\Omega)^n$ имеем:

$$|\langle B_1(v^m), \varphi\rangle - \langle B_1(v^0), \varphi\rangle| = \left| \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^0 v_j^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\varphi\|_V \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда следует, что

$$\|B_1(v^m) - B_1(v^0)\|_{V^*} \leqslant \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0 + v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m (v_j^m - v_j^0)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \|v_j^0 (v_i^m - v_i^0)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m\|_{L_4(\Omega)} \|v_j^m - v_j^0\|_{L_4(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \|v_j^0\|_{L_4(\Omega)} \|v_i^m - v_i^0\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} + C_1 \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} =$$

$$= C_1 \big(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n}\big) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n}.$$

Таким образом получили, что

$$\|B_1(v^m) - B_1(v^0)\|_{V^*} \leqslant C_1 \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n}\right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n}. \quad (1.1.11)$$

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(\Omega)^n$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in L_4(\Omega)^n$. Тогда непрерывность отображения $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*$ следует из неравенства (1.1.11).

2) Так как в силу теоремы вложения Соболева мы имеем компактное вложение $X \subset L_4(\Omega)^n$, для $n = 2, 3$, то имеем: $X \subset L_4(\Omega)^n \xrightarrow{B_1} V^* \subset X^*$, где первое вложение вполне непрерывно, а отображение B_1 и последнее вложение

– непрерывны. Таким образом получили, что для любой функции $v \in X$ функция $B_1(v) \in X^*$ и отображение $B_1 : X \to X^*$ – вполне непрерывно. $\square$

Лемма 1.1.4. *Для операторов B_2 и B_3 имеют место следующие свойства:*

1. *Для $i = 2, 3$ операторы $B_i : V \to X^*$ – непрерывны и для них имеет место оценка:*
$$\|B_i(v)\|_{X^*} \leqslant C_2 \|v\|_V^2. \tag{1.1.12}$$
2. *Для $i = 2, 3$ и любой функции $v \in X$ значения $B_i(v) \in X^*$ и отображения $B_i : X \to X^*$ – вполне непрерывны.*

Доказательство. Мы докажем данную лемму для оператора B_2. Доказательство в случае оператора B_3 полностью аналогично.

1) Для любых $v \in V, \varphi \in X$ в силу определения оператора B_2 имеем

$$|\langle B_2(v), \varphi\rangle| = \left| \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \right| \leqslant \sum_{i,j,k=1}^n \|v_k\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)} \times$$
$$\times \left\| \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant C_3 \|v\|_{L_4(\Omega)^n} \|v\|_V \|\varphi\|_X \leqslant C_4 \|v\|_V^2 \|\varphi\|_X.$$

Отсюда и следует требуемая оценка (1.1.12).

Покажем непрерывность отображения $B_2 : V \to X^*$. Для произвольных $v^m, v^0 \in V$ имеем:

$$|\langle B_2(v^m), \varphi\rangle - \langle B_2(v^0), \varphi\rangle| = \Big| \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx -$$
$$- \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \Big| \leqslant \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \left\| \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \|\varphi\|_X.$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} =$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} \|v_k^m\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \left\| \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| v_k^m - v_k^0 \right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^m - v^0\|_V + C_5 \|v^0\|_V \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \left(\|v^m\|_V + \|v^0\|_V \right) \|v^m - v^0\|_V.$$

Отсюда следует, что

$$\|B_2(v^m) - B_2(v^0)\|_{X^*} \leqslant C_6 \left(\|v^m\|_V + \|v^0\|_V \right) \|v^m - v^0\|_V. \tag{1.1.13}$$

Итак, если последовательность $\{v^m\} \subset V$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in V$, то из неравенства (1.1.13) следует непрерывность отображения $B_2 : V \to X^*$.

2) Для доказательства утверждения этого пункта мы уже имеем: $X \subset V \xrightarrow{B_2} X^*$. Здесь первое вложение вполне непрерывно, а отображение B_2 – непрерывно. Таким образом, для любой функции $v \in X$ получим, что функция $B_2(v) \in X^*$, а отображение $B_2 : X \to X^*$ – вполне непрерывно. □

Лемма 1.1.5. *Оператор $K : X \to X^*$ — вполне непрерывен.*

Доказательство. Вполне непрерывность оператора $K : X \to X^*$ следует из вполне непрерывности операторов $A : X \to X^*$ лемма 1.1.1; $B_1 : X \to X^*$ лемма 1.1.3; $B_2 : X \to X^*$ лемма 1.1.4; $B_3 : X \to X^*$ лемма 1.1.4. □

1.1.2 Априорная оценка

Вместе с уравнением (1.1.6) мы будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений

$$L_\varepsilon(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \quad \lambda \in [0, 1], \tag{1.1.14}$$

которое совпадает с (1.1.6) при $\lambda = 1$.

Теорема 1.1.3. *Если $v \in X$ – решение операторного уравнения (1.1.14) для некоторого $\lambda \in [0, 1]$, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\varepsilon \|v\|_X^2 \leqslant C_7, \tag{1.1.15}$$

где $C_7 = \dfrac{\|f\|^2_{V^*}}{2\nu}$. *Более того, при* $\lambda = 1$ *имеет место следующая оценка:*

$$\nu\|v\|^2_V \leqslant C_8, \tag{1.1.16}$$

где $C_8 = \dfrac{\|f\|^2_{V^*}}{\nu}$.

Доказательство. Пусть $v \in X$ – решение (1.1.14), тогда для него при любом $\varphi \in X$ имеет место равенство

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \lambda\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx -$$
$$- \lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \lambda\langle f, \varphi\rangle. \tag{1.1.17}$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx + \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx =$$
$$= 2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k\, \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = -2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx -$$
$$-2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx = -2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx.$$

Тогда (1.1.17) можно переписать в виде

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \lambda\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx +$$
$$+2\lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx = \lambda\langle f, \varphi\rangle.$$

Поскольку последнее равенство имеет место при всех $\varphi \in X$, то оно имеет

место и при $\varphi = v$.

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v)\, dx - \lambda \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx + \lambda\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla v\, dx +$$
$$+ 2\lambda\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx = \lambda\langle f, v\rangle. \quad (1.1.18)$$

Преобразуем слагаемые в левой части (1.1.18) следующим образом:

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla v\, dx = \nu\|v\|_V^2; \quad \varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v)\, dx = \varepsilon\|v\|_X^2;$$
$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i \frac{\partial (v_j v_j)}{\partial x_i}\, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_j v_j\, dx = 0;$$
$$2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx = 2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v)\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial \left(\mathcal{E}_{ij}(v)\mathcal{E}_{ij}(v)\right)}{\partial x_k}\, dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v)\mathcal{E}_{ij}(v)\, dx = 0.$$

Здесь мы воспользовались симметричностью тензора скоростей деформаций $\mathcal{E}$.

Заметим, что правую часть равенства (1.1.18) можно оценить сверху

$$\lambda\langle f, v\rangle \leqslant \lambda\|f\|_{V^*}\|v\|_V \leqslant \lambda\frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\delta} + \lambda\frac{\delta\|v\|_V^2}{2}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши:

$$bc \leqslant \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$$

Таким образом, получили для $\delta = \nu$

$$\varepsilon\|v\|_X^2 + \lambda\nu\|v\|_V^2 \leqslant \lambda\frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} + \lambda\frac{\nu\|v\|_V^2}{2};$$
$$\varepsilon\|v\|_X^2 + \lambda\frac{\nu\|v\|_V^2}{2} \leqslant \lambda\frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu};$$
$$\varepsilon\|v\|_X^2 \leqslant \lambda\frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} \leqslant \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}.$$

Аналогично при $\lambda = 1$ получаем:

$$\nu\|v\|_V^2 \leqslant \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}.$$

Отсюда и следуют требуемые оценки (1.1.15) и (1.1.16). □

1.1.3 Существование решений аппроксимационной задачи

Теорема 1.1.4. *Операторное уравнение* (1.1.6) *имеет хотя бы одно решение* $v \in X$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

В силу априорной оценки (1.1.15) все решения семейства уравнений (1.1.14):

$$L_\varepsilon(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \quad \text{где} \quad \lambda \in [0,1],$$

лежат в шаре B_R радиуса $R = C_7 + 1$ с центром в нуле. И, следовательно, все решения семейства уравнений $v = \lambda L_\varepsilon^{-1}[f - K(v)] = 0$, где $\lambda \in [0,1]$, лежат в том же шаре B_R. В силу леммы 1.1.5 отображение $[f - K(\cdot)] : X \to X^*$ является вполне непрерывным. А из леммы 1.1.2 следует, что оператор $L_\varepsilon^{-1} : X^* \to X$ непрерывен.

Таким образом, отображение $L_\varepsilon^{-1}[f - K(\cdot)] : X \to X$ вполне непрерывно. Тогда отображение $G : [0,1] \times X \to X, \quad G(\lambda, v) = \lambda L_\varepsilon^{-1}[f - K(v)]$ вполне непрерывно по совокупности переменных λ и v.

Из вышесказанного имеем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$ невырождено на границе шара B_R. Следовательно, для него определена степень Лере–Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0,\cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0).$$

Вспомним, что $\Phi(0,\cdot) = I$ и выполнено равенство $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$. Отсюда, $\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0) = 1$.

Таким образом, получили, что существует хотя бы одно решение $v \in X$ уравнения

$$v + L_\varepsilon^{-1}\left[f - K(v)\right] = 0$$

и, следовательно, уравнения (1.1.6). $\square$

Поскольку существует решение $v \in X$ уравнения (1.1.6), то из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача (1.1.1) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in X$.

1.1.4 Доказательство теоремы 1.1.1

Доказательство. Положим в (1.1.4) $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m}$. В силу выбора последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. В силу теоремы 1.1.4 при каждом ε_m существует $v_m \in X \subset V$ – слабое решение аппроксимационной Задачи 1.1.1. Таким образом, каждое v_m удовлетворяет уравнению:

$$\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx +$$
$$+ \nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\,dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx = \int \langle f, \varphi\rangle. \quad (1.1.19)$$

В силу существования априорной оценки (1.1.16) (и в силу рефлексивности пространства V) $\{v_m\}$ будет слабо сходиться к некоторому элементу $v_* \in V$.

Тогда при $m \to \infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\,dx \to \nu \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi\,dx.$$

Далее заметим:

$$\lim_{m\to\infty} \left| \varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx \right| = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\varepsilon_m} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sqrt{\varepsilon_m} \lim_{m\to\infty} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\, dx \right|.$$

Без ограничения общности, в силу оценки (1.1.15) теоремы 1.1.3 получаем:

$$\varepsilon_m \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Так как V вполне непрерывно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для n=2,3, то, учитывая оценку (1.1.16), без ограничения общности можно считать, что $v_m \to v_*$ сильно в $L_4(\Omega)^n$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx.$$

В оставшихся интегралах имеем

$$\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx,$$

$$\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx.$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^n$. Таким образом, их произведение сходится слабо к $v_* \nabla v_*$ в $L_{4/3}(\Omega)^n$.

Таким образом, переходя в равенстве (1.1.19) к пределу при $m \to +\infty$, получим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему равенству

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v_* : \nabla\varphi\, dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Вспоминаем, что $v_* \in V$. Это и завершает доказательство теоремы 1.1.1.

□

1.1.5 Случай с неограниченной областью.

Рассмотрим теперь задачу (1.1.1)–(1.1.2) в случае, когда Ω – произвольная область в пространстве $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$, возможно неограниченная. Аналогично случаю с ограниченной областью для задачи (1.1.1)–(1.1.2) вводятся понятия слабого решения (аналогично определению 1.1.1) и аппроксимационной задачи (аналогично задаче 1.1.1):

Определение 1.1.2. *Пусть Ω – произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, и $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи (1.1.1)–(1.1.2) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ равенству:*

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \\ - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.1.20)$$

Задача 1.1.2. *Пусть Ω – произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, и $f \in V^*$. Найти функцию $v \in X$, удовлетворяющую для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ равенству:*

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla (\Delta v) \ : \nabla (\Delta \varphi) \, dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \\ - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.1.21)$$

В данном случае справедлив следующий аналог теоремы 1.1.1:

Теорема 1.1.5. *Пусть Ω – произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$ и $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача (1.1.1)–(1.1.2) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.*

Доказательство. Обозначим через Ω_m пересечение Ω с шаром B_m с центром в нуле радиуса m в пространстве $R^n, m = 1, 2, \ldots$.

Введем новые обозначения:

Через $L_p(\Omega_m)^n, 1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество всех измеримых функций $u : \Omega_m \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-той степенью.

$\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$ – пространство функций на Ω_m со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω_m;

$\mathcal{V}(\Omega_m) = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega_m)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ – подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$;

$V(\Omega_m)$ – замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega_m)^n$;

$X(\Omega_m)$ – замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^3(\Omega_m)^n$.

Аналогично введем обозначения $V(B_k)$ и $L_4(B_k)$, где B_k - шар с центром в нуле и радиусом k.

Следуя [8], с.117, можно рассмотреть сужение f на $\Omega_m : f|_{\Omega_m} \in V^*(\Omega_m)$, которое задается формулой

$$\langle f|_{\Omega_m}, \varphi\rangle = \langle f, \tilde{\varphi}\rangle,$$

где φ – произвольная функция из $\mathcal{V}$, а $\tilde{\varphi}$ – продолжение φ нулем на все Ω. Очевидно, $||f|_{\Omega_m}||_{V^*(\Omega_m)} \leqslant ||f||_{V^*(\Omega)}$.

На каждой области Ω_m рассмотрим задачу 1.1.2. Заменим в (1.1.21) f на $f|_{\Omega_m}$ и пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$. По теореме 1.1.1 эти задачи имеют хотя бы одно решение v_m. Обозначим через $\tilde{v}_m$ продолжение v_m нулем на все Ω. По теореме 1.1.3 нормы $||\tilde{v}_m||_{V(\Omega)} = ||v_m||_{V(\Omega_m)}$ равномерно ограничены. Поэтому при $m \to \infty$ без ограничения общности можно считать, что $\tilde{v}_m \rightharpoonup \tilde{v}_0$ слабо в V. Покажем, что $\tilde{v}_0$ есть решение задачи (1.1.20).

Возьмем произвольное $\varphi \in \mathcal{V}$. При некотором k носитель φ лежит в Ω_k. Обозначим через v_m^* продолжение $\tilde{v}_m$ нулем за пределы Ω, суженное на B_k. Ясно, что $v_m^* \to v_0^*$ слабо в $V(B_k)$, и значит, сильно в $L_4(B_k)$.

Поэтому все слагаемые (1.1.21) с $\varepsilon = \dfrac{1}{m}, v = \tilde{v}_m$:

$$\frac{1}{m}\int\limits_\Omega \nabla(\Delta\tilde{v}_m) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\tilde{v}_m)_i(\tilde{v}_m)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla\tilde{v}_m : \nabla\varphi\,dx -$$
$$-\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial(\tilde{v}_m)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial(\tilde{v}_m)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx = \langle f, \varphi\rangle \tag{1.1.22}$$

сходятся к соответствующим слагаемым (1.1.20):

$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(\tilde{v}_0)_i(\tilde{v}_0)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\nu\int\limits_{\Omega}\nabla\tilde{v}_0:\nabla\varphi\,dx-\varkappa\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}(\tilde{v}_0)_k\frac{\partial(\tilde{v}_0)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx-$$
$$-\varkappa\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}(\tilde{v}_0)_k\frac{\partial(\tilde{v}_0)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx=\langle f,\varphi\rangle,\quad(1.1.23)$$

причем, без ограничения общности, в силу оценки (1.1.15) теоремы 1.1.3 получаем:

$$\frac{1}{m}\int\limits_{\Omega}\nabla\left(\Delta(\tilde{v}_m)\right):\nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx\to 0\quad\text{при } m\to\infty.$$

Итак, $\tilde{v}_0$ удовлетворяет тождеству (1.1.20) при всех $\varphi\in\mathcal{V}$. Значит $\tilde{v}_0$ является слабым решением задачи (1.1.1)–(1.1.2). □

1.2 Задача оптимального управления для стационарной модели с полной производной в реологическом соотношении

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi:\ V\multimap V^*$ в качестве функции управления. Будем предполагать, что отображение Ψ удовлетворяет следующим условиям:

i_1) отображение Ψ определено на пространстве V и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;

i_2) отображение Ψ полунепрерывно сверху (то есть, для каждого $v\in V$ и открытого множества $K\subset V^*$ такого, что $\Psi(v)\subset K$ существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v))\subset K$) и компактно (то есть, образ Ψ относительно компактен в V^*);

i_3) отображение Ψ глобально ограничено, т.е. существует константа $M>0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{V^*}:=\sup\{\|u\|_{V^*}:\ u\in\Psi(v)\}\leqslant M\quad\text{для всех}\quad v\in V;$$

i_4) отображение Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^{\infty}\subset V$, $v_l\rightharpoonup v_0$, $f_l\in\Psi(v_l)$ и $f_l\to f_0$ в V^*, то $f_0\in\Psi(v_0)$.

Будем рассматривать слабую постановку задачи оптимального управления с обратной связью для краевой задачи (1.1.1)–(1.1.2). Под обратной связью мы понимаем условие

$$f \in \Psi(v). \tag{1.2.1}$$

Определение 1.2.1. *Пара функций* $(v, f) \in V \times V^*$ *называется слабым решением задачи оптимального управления с обратной связью* (1.1.1)–(1.1.2), (1.2.1), *если она удовлетворяет равенству*

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \, \partial x_k} \, dx - \\ - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \, \partial x_k} \, dx = \langle f, \varphi \rangle. \tag{1.2.2}$$

для любого $\varphi \in X$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1.2.1. *Пусть отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* $i_1)$–$i_4)$. *Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи* (1.1.1)–(1.1.2), (1.2.1).

Доказательство данной теоремы будет приведено в пункте 1.2.3.

Обозначим через $\Sigma \subset V \times V^*$ множество всех слабых решений задачи (1.1.1)–(1.1.2),(1.2.1). Рассмотрим произвольный функционал стоимости $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$j_1)$ существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geqslant \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$;

$j_2)$ если $v_m \rightharpoonup v_*$ в V и $f_m \to f_*$ в V^*, то $\Phi(v_*, f_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_m, f_m)$.

В качестве примера такого функционала стоимости можно взять $\Phi(v, f) = \|v + f\|$. Условие $j_1)$ очевидно. Доказательство условия $j_2)$ основывается на следующей теореме (см. [11], стр. 168).

Теорема 1.2.2. *Если* x_0 *– слабый предел последовательности* $\{x_n\}$, *то* $\|x_0\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема:

Теорема 1.2.3. *Если отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* $i_1)$–$i_4)$, *а функционал* Φ *– условиям* $j_1)$, $j_2)$, *то задача* (1.1.1)–(1.1.2),(1.2.1) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*, f_*) *такое, что* $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f)$.

Доказательство теорем 1.2.1 и 1.2.3 основано на рассмотрении семейства аппроксимационных задач, доказательстве их разрешимости и последующем предельном переходе.

1.2.1 Аппроксимационная задача

Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу с малым параметром:

Задача 1.2.1. *Найти пару функций* $(v, f) \in X \times V^*$, *удовлетворяющих условию обратной связи*

$$f \in \Psi(v)$$

и равенству

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla\left(\Delta v\right) \ : \nabla\left(\Delta\varphi\right) \, dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla\varphi \, dx -$$

$$- \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.2.3)$$

для любого $\varphi \in X$.

Здесь ε – некоторое фиксированное положительное число.

Для исследования аппроксимационной задачи перейдем к операторной трактовке. Определим операторы A, N, B_1, B_2, B_3 с помощью следующих равенств:

$$A: \ V \to V^*, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla\varphi \, dx, \quad v, \varphi \in V,$$

$$N: \ X \to X^*, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi) \, dx, \quad v, \varphi \in X,$$

$$B_1: \ L_4(\Omega)^n \to V^*, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n, \quad \varphi \in V,$$

$$B_2: \ V \to X^*, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \, \partial x_k} \, dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in X,$$

$$B_3: \ V \to X^*, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \, \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \, \partial x_k} \, dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in X.$$

Замечание 1.2.1. *Заметим, что V плотно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для n=2,3, значит B_1 можно рассматривать и как отображение $B_1 : V \to V^*$, а поскольку X вложено в V, то операторы A, B_i, $i = 1, 2, 3$, можно рассматривать и как отображения $A, B_1, B_2, B_3 : X \to X^*$. При этом, чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, определенных одной и той же формулой, но действующих в разных функциональных пространствах, когда из контекста ясно, в каких функциональных пространствах действуют операторы в данном месте текста.*

В силу произвольности функции $\varphi \in X$ в равенстве (1.2.3) задача о нахождении слабого решения аппроксимационной задачи 1.2.1 эквивалентна задаче о нахождении решения следующего операторного включения:

$$\varepsilon N v + \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) = f \in \Psi(v). \tag{1.2.4}$$

Таким образом, каждое слабое решение задачи 1.2.1 является решением операторного включения (1.2.4) и обратно.

Также введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L_\varepsilon : X \to X^*, \quad L_\varepsilon(v) = \varepsilon N v;$$
$$K : X \to X^*, \quad K(v) = \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v).$$

В этих обозначениях уравнение (1.2.4) записывается в виде:

$$L_\varepsilon(v) + K(v) = f \in \Psi(v). \tag{1.2.5}$$

Заметим, что задача существования решения $(v, f) \in X \times V^*$ аппроксимационной задачи эквивалентна задаче существования решения $v \in X$ для операторного включения:

$$v \in \mathfrak{M}(v), \quad \text{где } \mathfrak{M}(v) = (L_\varepsilon)^{-1}\Big(\Psi(v) - K(v)\Big).$$

Задача (1.2.5) может быть переписана в виде

$$v \in \mathfrak{M}(v). \tag{1.2.6}$$

Замечание 1.2.2. *В силу введенных определений операторов A, L_ε, B_1, B_2, B_3, K для этих операторов справедливы свойства, доказанные в параграфе 1.1.1, т.е. справедливы леммы 1.1.1–1.1.5.*

Замечание 1.2.3. *Заметим, что равенство (1.2.2) совпадает с равенством (1.1.1) определения 1.1.1. Следовательно, априорные оценки для решений задачи (1.1.1)–(1.1.2) будут верны и для решений задачи оптимального управления с обратной связью (1.1.1)–(1.1.2), (1.2.1). Таким образом, справедлива следующая теорема:*

Теорема 1.2.4. *Если $v \in X$ – решение семейства включений $v \in \lambda\mathfrak{M}(v)$ для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\varepsilon\|v\|_X^2 \leqslant C_7. \tag{1.2.7}$$

Более того, при $\lambda = 1$ имеет место следующая оценка:

$$\nu\|v\|_V^2 \leqslant C_8. \tag{1.2.8}$$

1.2.2 Существование решений аппроксимационной задачи

Теорема 1.2.5. *Существует хотя бы одно решение $v \in X$ операторного включения (1.2.6).*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей вида $I - F$, где I – тождественное отображение, а F – вполне непрерывное многозначное отображение, определенное на ограниченной области банахова пространства и имеющее непустые, выпуклые, компактные значения (см., например, [2], [21]).

В нашем случае в силу леммы 1.1.2 оператор $L_\varepsilon^{-1} : X^* \to X$ – непрерывен, а в силу леммы 1.1.5 оператор $K : X \to X^*$ – вполне непрерывен. Следовательно, отображение $\mathfrak{M}(v) = (L_\varepsilon)^{-1}\big(\Psi(v) - K(v)\big)$ является вполне непрерывным многозначным отображением.

В силу теоремы 1.2.4 все решения семейства операторных включений (1.2.6) удовлетворяют априорной оценке (1.2.7). Следовательно, все включения этого семейства не имеют решений на границе замкнутого шара B_R

радиуса $R = C_7 + 1$ с центром в нуле. Таким образом, определена топологическая степень $\deg\,(I - \lambda\mathfrak{M}, B_R, 0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg\,(I, B_R, 0) = \deg\,(I - \mathfrak{M}, B_R, 0).$$

В силу условия нормировки $\deg\,(I, B_R, 0) = 1$. Следовательно, $\deg\,(I - \mathfrak{M}, B_R, 0) = 1$.

Так как топологическая степень отлична от нуля, получили, что существует хотя бы одно решение $v \in X$ операторного включения (1.2.6). □

Поскольку существует решение $v \in X$ включения (1.2.6), то из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение $(v, f) \in X \times V^*$.

1.2.3 Доказательство теоремы 1.2.1

Доказательство. Положим в (1.2.3) $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m}$. В силу выбора последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. В силу теоремы 1.2.5 при каждом ε_m существует пара $(v_m, f_m) \in X \times V^* \subset V \times V^*$, которая удовлетворяет включению (1.2.1) и равенству:

$$\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla\,(\Delta\varphi)\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx +$$
$$+ \nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\,dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.2.9)$$

В силу существования априорной оценки (1.2.8) (и в силу рефлексивности пространства V) $\{v_m\}$ будет слабо сходиться к некоторому элементу $v_* \in V$.

Тогда при $m \to \infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\,dx \to \nu \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi\,dx.$$

Далее заметим:

$$\lim_{m\to\infty}\left|\varepsilon_m\int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m):\nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx\right| = \lim_{m\to\infty}\sqrt{\varepsilon_m}\left|\sqrt{\varepsilon_m}\int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m):\nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sqrt{\varepsilon_m}\lim_{m\to\infty}\left|\sqrt{\varepsilon_m}\int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m):\nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx\right|.$$

Без ограничения общности, в силу оценки (1.2.7) теоремы 1.2.4 получаем:

$$\varepsilon_m\int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta v_m\right):\nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx \to 0 \quad \text{при } m\to\infty.$$

Так как V вполне непрерывно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для n=2,3, то, учитывая оценку (1.2.8), без ограничения общности можно считать, что $v_m \to v_*$ сильно в $L_4(\Omega)^n$. Откуда следует, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx.$$

В оставшихся интегралах имеем

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx,$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx.$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^n$. Таким образом, их произведение сходится слабо к $v_*\nabla v_*$ в $L_{4/3}(\Omega)^n$.

Принимая во внимание априорную оценку (1.2.8) и условия (i_1)–(i_4), мы без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in V^*$ такое, что $f_m \to f_* \in \Psi(v_*)$ при $m \to +\infty$.

Таким образом, переходя в равенстве (1.2.9) к пределу при $m \to +\infty$

получим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему равенству

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx -$$

$$-\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Вспоминаем, что $v_* \in V$. Это и завершает доказательство теоремы 1.2.1.

□

1.2.4 Доказательство теоремы 1.2.3

Из теоремы 1.2.1 получаем, что множество решений Σ не пусто и ограниченно снизу. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что

$$\lim_{l \to \infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v,f) \in \Sigma} \Phi(v, f).$$

Как и ранее, используя оценку (1.2.8), не ограничивая общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, можем предположить, что

$$v_l \rightharpoonup v^* \quad \text{слабо в} \quad V,$$

$$v_l \to v^* \quad \text{сильно в} \quad L_4(\Omega)^n,$$

$$f_l \to f^* \in \Psi(v^*) \quad \text{сильно в} \quad V \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Отсюда так же, как и в предыдущем доказательстве, получим соотношения

$$\nu A v_l \rightharpoonup \nu A v_* \quad \text{слабо в} \quad V^*,$$

$$B_1(v_l) \to B_1(v_*) \quad \text{сильно в} \quad V^*,$$

$$B_2(v_l) \rightharpoonup B_2(v_*) \quad \text{слабо в} \quad X^*,$$

$$B_3(v_l) \rightharpoonup B_3(v_*) \quad \text{слабо в} \quad X^* \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Переходя к пределу в соотношении

$$\nu A v_l - B_1(v_l) - \varkappa B_2(v_l) - \varkappa B_3(v_l) = f_l \in \Psi(v_l),$$

будем иметь $(v^*, f^*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, то придем к неравенству

$$\Phi(v^*, f^*) \leqslant \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f),$$

которое доказывает, что (v^*, f^*) – требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 1.2.3.

1.3 Существование слабых решений стационарной математической модели с объективной производной в реологическом соотношении

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. Рассматривается следующая краевая задача:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - 2\varkappa \mathrm{Div}\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\Big) - \\ - 2\varkappa \mathrm{Div}\Big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) + \mathrm{grad}\ p = f, \quad x \in \Omega; \quad (1.3.1)$$

$$\mathrm{div}\ v = 0, \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0; \quad (1.3.2)$$

где $v(x)$ – вектор–функция скоростей в точке области Ω, $p(x)$ – функция давления, $f(x)$ – плотность внешних сил.

Определение 1.3.1. *Пусть $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи (1.3.1)–(1.3.2) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in X$ равенству:*

$$\nu \int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx - \\ - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx + \\ + 2\varkappa \int_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle. \quad (1.3.3)$$

Основным результатом текущего параграфа является следующая теорема:

Теорема 1.3.1. *Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача (1.3.1)–(1.3.2) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.*

Доказательство теоремы 1.3.1 основано на рассмотрении семейства аппроксимационных задач, доказательстве их разрешимости и последующем предельном переходе.

1.3.1 Аппроксимационная задача

Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу с малым параметром:

Задача 1.3.1. *Пусть $f \in V^*$. Найти функцию $v \in X$, удовлетворяющую для любого $\varphi \in X$ равенству:*

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx +$$
$$+ 2\varkappa \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.3.4)$$

Здесь ε – некоторое фиксированное положительное число.

Для исследования аппроксимационной задачи перейдем к операторной трактовке. Определим операторы A, N, B_1, B_2, B_3, D с помощью следующих равенств:

$$A : V \to V^*, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx, \quad v, \varphi \in V;$$

$$N : X \to X^*, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx, \quad v, \varphi \in X;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n,\ \varphi \in V;$$

$$B_2 : V \to X^*, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V,\ \varphi \in X;$$

$$B_3 : V \to X^*, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V,\ \varphi \in X;$$

$$D : V \to X^*, \langle D(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v) \Big) : \nabla\varphi\, dx,\ v \in V, \varphi \in X.$$

Замечание 1.3.1. *Заметим, что V плотно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для n=2,3, значит B_1 можно рассматривать и как отображение $B_1 : V \to V^*$, а по-*

скольку X вложено в V, то операторы A, D, B_i, $i = 1, 2, 3$, можно рассматривать и как отображения $A, B_1, B_2, B_3, D : X \to X^*$. При этом, чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, определенных одной и той же формулой, но действующих в разных функциональных пространствах, когда из контекста ясно, в каких функциональных пространствах действуют операторы в данном месте текста.

В силу произвольности $\varphi \in X$ в Задаче 1.3.1 равенство (1.3.4) эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\varepsilon N v + \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = f. \tag{1.3.5}$$

Таким образом, каждое решение задачи 1.3.1 является решением операторного уравнения (1.3.5) и обратно.

Введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L_\varepsilon : X \to X^*, \quad L_\varepsilon(v) = \varepsilon N v;$$
$$K : X \to X^*, \quad K(v) = \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v).$$

В этих обозначениях уравнение (1.3.5) записывается в виде:

$$L_\varepsilon(v) + K(v) = f. \tag{1.3.6}$$

Замечание 1.3.2. *В силу введенных определений операторов A, L_ε, B_1, B_2, B_3, для этих операторов справедливы свойства, доказанные в пункте 1.1.1, т.е. справедливы леммы 1.1.1–1.1.5.*

Исследуем свойства операторов D и K.

Лемма 1.3.1. *Оператор $D : V \to X^*$ – непрерывен и для него имеет место оценка:*

$$\|D(v)\|_{X^*} \leqslant C_9 \|v\|_V^2. \tag{1.3.7}$$

Кроме того, для любой функции $v \in X$ функция $D(v) \in X^*$ и отображение $D : X \to X^*$ – вполне непрерывно.

Доказательство. Получим необходимую оценку для тензора $\mathcal{E}$:

$$\|\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}} \leqslant C_{10}\sum_{i,j=1}^{n}\|\mathcal{E}_{ij}(v)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{11}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2\,dx =$$

$$= C_{11}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i})\,dx =$$

$$= C_{11}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx - 2C_{11}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_j}{\partial x_j})\,dx+$$

$$+C_{11}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,dx = C_{11}\Big[\int\limits_{\Omega}\nabla v:\nabla v\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\nabla v:\nabla v\,dx\Big] = C_{12}\|v\|^2_V.$$

Также получим оценку для тензора W_ρ:

$$\|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \leqslant C_{13}\sum_{i,j=1}^{n}\|(W_\rho)_{ij}(v)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{14}\sum_{i,j=1}^{n}\|(W_\rho)_{ij}(v)\|_{L_\infty(\Omega)} =$$

$$= C_{15}\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\left|\int\limits_{\Omega}\rho(x-y)(\frac{\partial v_i(t,y)}{\partial y_j}-\frac{\partial v_j(t,y)}{\partial y_i})\,dy\right| =$$

$$= C_{15}\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\left|\int\limits_{\Omega}-\frac{\partial\rho(x-y)}{\partial y_j}v_i(t,y)+\frac{\partial\rho(x-y)}{\partial y_i}v_j(t,y)\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{16}\|\mathrm{grad}\ \rho\|_{L_2(\Omega)^n}\|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n}.$$

Далее для любых $v\in V, \varphi\in X$ в силу определения оператора D имеем

$$|\langle D(v),\varphi\rangle| = \left|\int\limits_{\Omega}\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big):\nabla\varphi\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant\Big[\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}+\|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\Big]\|\varphi\|_{C(\Omega)^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_{17}\|v\|^2_V\|\varphi\|_X.$$

Отсюда и следует требуемая оценка (1.3.7).

Докажем непрерывность оператора D. Для произвольных $v^m, v^0\in V$ име-

ем:

$$\big|\langle D(v^m),\varphi\rangle - \langle D(v^0),\varphi\rangle\big| = \Big|\int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(v^m)W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m)\big) : \nabla\varphi\, dx -$$

$$- \int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(v^0)W_\rho(v^0) - W_\rho(v^0)\mathcal{E}(v^0)\big) : \nabla\varphi\, dx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_{18}\int\limits_\Omega \Big|\mathcal{E}(v^m)W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)W_\rho(v^0) + W_\rho(v^0)\mathcal{E}(v^0)\Big|\, dx \times$$

$$\times\|\varphi\|_X \leqslant C_{18}\int\limits_\Omega \Big|\mathcal{E}(v^m)\big(W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0)\big) + \big(\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)\big)W_\rho(v^0) -$$

$$- W_\rho(v^m)\big(\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)\big) - \big(W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0)\big)\mathcal{E}(v^0)\Big|\, dx\|\varphi\|_X \leqslant$$

$$\leqslant C_{18}\Big[\|\mathcal{E}(v^m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\|W_\rho(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|\mathcal{E}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \times$$

$$\times\|W_\rho(v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|W_\rho(v^m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\|\mathcal{E}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|W_\rho(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \times$$

$$\times\|\mathcal{E}(v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\Big]\|\varphi\|_X \leqslant C_{19}\Big[\|v^m\|_V\|v^m - v^0\|_V + \|v^m - v^0\|_V\|v^0\|_V +$$

$$+\|v^m\|_V\|v^m - v^0\|_V + \|v^m - v^0\|_V\|v^0\|_V\Big]\|\varphi\|_X \leqslant$$

$$\leqslant C_{20}\big(\|v^m\|_V + \|v^0\|_V\big)\|v^m - v^0\|_V\|\varphi\|_X.$$

Отсюда следует, что

$$\big\|D(v^m) - D(v^0)\big\|_{X^*} \leqslant C_{20}\left(\|v^m\|_V + \big\|v^0\big\|_V\right)\big\|v^m - v^0\big\|_V.$$

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset V$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in V$. Тогда непрерывность отображения $D : V \to X^*$ следует из последнего неравенства.

Для доказательства вполне непрерывности отображения $D : X \to X^*$ мы имеем: $X \subset V \xrightarrow{D} X^*$. Здесь первое вложение вполне непрерывно, а отображение D — непрерывно. Таким образом, для любой функции $v \in X$ получим, что функция $D(v) \in X^*$, а отображение $D : X \to X^*$ – вполне непрерывно. □

Лемма 1.3.2. *Оператор $K : X \to X^*$ — вполне непрерывен.*

Доказательство. Вполне непрерывность оператора $K : X \to X^*$ следует из вполне непрерывности операторов $A : X \to X^*$ лемма 1.1.1; $B_1 : X \to X^*$

лемма 1.1.3; $B_2 : X \to X^*$ лемма 1.1.4; $B_3 : X \to X^*$ лемма 1.1.4; $D : X \to X^*$ лемма 1.3.1. $\square$

1.3.2 Априорная оценка

Вместе с уравнением (1.3.6) мы будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений

$$L_\varepsilon(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \quad \lambda \in [0,1], \tag{1.3.8}$$

которое совпадает с (1.3.6) при $\lambda = 1$.

Теорема 1.3.2. *Если $v \in X$ – решение операторного уравнения (1.3.8) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\varepsilon \|v\|_X^2 \leqslant C_{21}, \tag{1.3.9}$$

где $C_{21} = \dfrac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}$. Более того, при $\lambda = 1$ имеет место следующая оценка:

$$\nu \|v\|_V^2 \leqslant C_{22}, \tag{1.3.10}$$

где $C_{22} = \dfrac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}$.

Доказательство. Пусть $v \in X$ – решение 1.3.1, тогда для него при любом $\varphi \in X$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi)\, dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \lambda\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi\, dx - \\
- \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx + \\
+ 2\lambda\varkappa \int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) : \nabla\varphi\, dx = \lambda \langle f, \varphi \rangle.
\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Как и в параграфе 1 главы 1 заметим, что

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx + \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \\
= -2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx.
\end{aligned}$$

Тогда (1.3.11) можно переписать в виде

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla\left(\Delta v\right) : \nabla\left(\Delta \varphi\right)\, dx - \lambda \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx +$$
$$+\lambda\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi\, dx + 2\lambda\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx +$$
$$+2\lambda\varkappa \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : \nabla\varphi\, dx = \lambda\langle f, \varphi\rangle.$$

Поскольку последнее равенство имеет место при всех $\varphi \in X$, то оно имеет место и при $\varphi = v$.

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla\left(\Delta v\right) : \nabla\left(\Delta v\right)\, dx - \lambda \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx + 2\lambda\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx +$$
$$+ \lambda\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla v\, dx + 2\lambda\varkappa \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : \nabla v\, dx = \lambda\langle f, v\rangle. \tag{1.3.12}$$

Преобразуем слагаемые в левой части (1.3.12) следующим образом:

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla v\, dx = \nu \|v\|_V^2; \quad \varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla\left(\Delta v\right) : \nabla\left(\Delta v\right)\, dx = \varepsilon \|v\|_X^2;$$
$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i \frac{\partial (v_j v_j)}{\partial x_i}\, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_j v_j\, dx = 0;$$
$$2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx = 2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v)\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial \left(\mathcal{E}_{ij}(v)\mathcal{E}_{ij}(v)\right)}{\partial x_k}\, dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v)\mathcal{E}_{ij}(v)\, dx = 0;$$
$$\int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : \nabla v\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) :$$
$$: \Big(\mathcal{E}(v) + W(v)\Big)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : \mathcal{E}(v)\, dx +$$
$$+\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : W(v)\, dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{E}_{ij} (W_\rho)_{jk} \mathcal{E}_{ik} -$$

$$-(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ki}\mathcal{E}_{ji}\Big)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big(\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}-(W_\rho)_{kj}\mathcal{E}_{ji}W_{ki}\Big)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big(\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik}-\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik}\Big)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big(\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}-\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}\Big)\,dx=0.$$

Здесь мы воспользовались симметричностью тензора скоростей деформаций $\mathcal{E}$ и кососимметричностью тензоров W_ρ и W.

Правую часть равенства (1.3.12) можно оценить сверху

$$\lambda\langle f,v\rangle\leqslant\lambda\|f\|_{V^*}\|v\|_V\leqslant\lambda\frac{\|f\|^2_{V^*}}{2\delta}+\lambda\frac{\delta\|v\|^2_V}{2}.$$

Таким образом, получили для $\delta=\nu$

$$\varepsilon\|v\|^2_X+\lambda\nu\|v\|^2_V\leqslant\lambda\frac{\|f\|^2_{V^*}}{2\nu}+\lambda\frac{\nu\|v\|^2_V}{2};\quad \varepsilon\|v\|^2_X+\lambda\frac{\nu\|v\|^2_V}{2}\leqslant\lambda\frac{\|f\|^2_{V^*}}{2\nu};$$

$$\varepsilon\|v\|^2_X\leqslant\lambda\frac{\|f\|^2_{V^*}}{2\nu}\leqslant\frac{\|f\|^2_{V^*}}{2\nu}.$$

Аналогично при $\lambda=1$ получаем:

$$\nu\|v\|^2_V\leqslant\frac{\|f\|^2_{V^*}}{\nu}.$$

Отсюда и следуют требуемые оценки (1.3.9) и (1.3.10). □

1.3.3 Существование решений аппроксимационной задачи

Теорема 1.3.3. *Операторное уравнение* (1.3.6) *имеет хотя бы одно решение* $v\in X$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

В силу априорной оценки (1.3.9) все решения семейства уравнений $L_\varepsilon(v)+\lambda K(v)=\lambda f$, где $\lambda\in[0,1]$, лежат в шаре B_R радиуса $R=C_{21}+1$ с центром в нуле. И, следовательно, все решения семейства уравнений $v=\lambda L_\varepsilon^{-1}\left[f-K(v)\right]=0$, где $\lambda\in[0,1]$, лежат в том же шаре B_R. В силу леммы

1.3.2 отображение $[f - K(\cdot)] : X \to X^*$ является вполне непрерывным. А из леммы 1.1.2 следует, что оператор $L_\varepsilon^{-1} : X^* \to X$ непрерывен.

Таким образом, отображение $L_\varepsilon^{-1}[f - K(\cdot)] : X \to X$ вполне непрерывно. Тогда отображение

$$G : [0,1] \times X \to X, \quad G(\lambda, v) = \lambda L_\varepsilon^{-1}[f - K(v)]$$

вполне непрерывно по совокупности переменных λ и v.

Из вышесказанного имеем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$ невырождено на границе шара B_R. Следовательно, для него определена степень Лере–Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0,\cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0).$$

Вспомним, что $\Phi(0,\cdot) = I$ и выполнено равенство $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$. Отсюда, $\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0) = 1$.

Таким образом, получили, что существует хотя бы одно решение $v \in X$ уравнения

$$v + L_\varepsilon^{-1}[K(v) - f] = 0$$

и, следовательно, уравнения (1.3.6). □

Поскольку существует решение $v \in X$ уравнения (1.3.6), то из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача 1.3.1 имеет хотя бы одно слабое решение $v \in X$.

1.3.4 Доказательство теоремы 1.3.1

Доказательство. Положим в (1.3.4) $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m}$. В силу выбора последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. В силу теоремы 1.3.3 при каждом

ε_m существует решение $v_m \in X \subset V$, которое удовлетворяет равенству:

$$\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx +$$
$$+ 2\varkappa \int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) : \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle. \quad (1.3.13)$$

В силу существования априорной оценки (1.3.10) (и в силу рефлексивности пространства V) $\{v_m\}$ будет слабо сходиться к некоторому элементу $v_* \in V$.

Тогда при $m \to \infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\, dx \to \nu \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi\, dx.$$

Далее заметим:

$$\lim_{m\to\infty} \left| \varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\ dx \right| = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\varepsilon_m} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\ dx \right| =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sqrt{\varepsilon_m} \lim_{m\to\infty} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\ dx \right|.$$

Без ограничения общности, в силу оценки (1.3.9) теоремы 1.3.2 получаем:

$$\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\ dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Так как V вполне непрерывно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для n=2,3, то, учитывая оценку (1.3.10), без ограничения общности можно считать, что $v_m \to v_*$, сильно в $L_4(\Omega)^n$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx.$$

В оставшихся интегралах имеем

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx.$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^n$. Таким образом, их произведение сходится слабо к $v_* \nabla v_*$ в $L_{4/3}(\Omega)^n$.

В последней части имеем:

$$\Big| \int\limits_{\Omega} \big(\mathcal{E}(v_m) W_\rho(v_m) - \mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*)\big) : \nabla\varphi\, dx \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{E}(v_m)\big(W_\rho(v_m) - W_\rho(v_*)\big) + \big(\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*)\big) W_\rho(v_*)\Big) : \nabla\varphi\, dx \Big| \le$$

$$\le \|\mathcal{E}(v_m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|W_\rho(v_m - v_*)\|_{L_\infty(\Omega)^{n^2}} +$$

$$+ \Big| \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} \mathcal{E}_{ij}(v_m - v_*)(W_\rho)_{jk}(v_*)(\nabla\varphi)_{ik}\, dx \Big| \le$$

$$\le \|\mathcal{E}(v_m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|v_m - v_*\|_{L_2(\Omega)^n} +$$

$$+ \Big| - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} \mathcal{E}_{ij}(v_m - v_*)(\nabla\varphi)_{ik}(W_\rho)_{kj}(v_*)\, dx \Big| \le$$

$$\le \|\mathcal{E}(v_m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|v_m - v_*\|_{L_4(\Omega)^n} +$$

$$+ \Big| \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \Big[(\nabla\varphi) W_\rho(v_*)\Big]\, dx \Big|.$$

Напомним, что последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^n$. Таким образом, получим:

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(v_m) W_\rho(v_m) : \nabla\varphi\, dx \to \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*) : \nabla\varphi\, dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Аналогично получим:

$$\int\limits_{\Omega} W_\rho(v_m) \mathcal{E}(v_m) : \nabla\varphi\, dx \to \int\limits_{\Omega} W_\rho(v_*) \mathcal{E}(v_*) : \nabla\varphi\, dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Таким образом, переходя в равенстве (1.3.13) к пределу при $m \to +\infty$, получим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему равенству

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx +$$
$$+ 2\varkappa \int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*) - W_\rho(v_*) \mathcal{E}(v_*) \big) : \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Вспоминаем, что $v_* \in V$. Это и завершает доказательство теоремы 1.3.1.

□

1.3.5 Случай с неограниченной областью

Рассмотрим теперь задачу (1.3.1)–(1.3.2) в случае, когда Ω – произвольная область в пространстве $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$, возможно неограниченная. Аналогично случаю с ограниченной областью для задачи (1.3.1)–(1.3.2) вводятся понятия слабого решения (аналогично определению 1.3.1) и аппроксимационной задачи (аналогично задаче 1.3.1):

Определение 1.3.2. *Пусть Ω – произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, и $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи (1.3.1)–(1.3.2) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ равенству:*

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx +$$
$$+ 2\varkappa \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.3.14)$$

Задача 1.3.2. *Пусть Ω – произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, и $f \in V^*$. Найти функцию функцию $v \in X$, удовлетворяющую для любого*

$\varphi \in \mathcal{V}$ *равенству:*

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v) \ : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla\varphi\, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx +$$
$$+ 2\varkappa \int\limits_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.3.15)$$

В данном случае справедлив следующий аналог теоремы 1.3.1:

Теорема 1.3.4. *Пусть Ω – произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$ и $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача (1.3.1)–(1.3.2) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.*

Доказательство. Обозначим через Ω_m пересечение Ω с шаром B_m с центром в нуле радиуса m в пространстве $R^n, m = 1, 2, \ldots$.

Введем новые обозначения:

Через $L_p(\Omega_m)^n, 1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество всех измеримых функций $u : \Omega_m \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-той степенью.

$\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$ – пространство функций на Ω_m со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω_m;

$\mathcal{V}(\Omega_m) = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega_m)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ – подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$;

$V(\Omega_m)$ – замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega_m)^n$;

$X(\Omega_m)$ – замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^3(\Omega_m)^n$.

Аналогично введем обозначения $V(B_k)$ и $L_4(B_k)$, где B_k - шар с центром в нуле и радиусом k.

Следуя [8], с.117, можно рассмотреть сужение f на $\Omega_m : f|_{\Omega_m} \in V^*(\Omega_m)$, которое задается формулой

$$\langle f|_{\Omega_m}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle,$$

где φ – произвольная функция из $\mathcal{V}$, а $\tilde{\varphi}$ – продолжение φ нулем на все Ω. Очевидно, $||f|_{\Omega_m}||_{V^*(\Omega_m)} \leqslant ||f||_{V^*(\Omega)}$.

На каждой области Ω_m рассмотрим задачу 1.3.2. Заменим в (1.3.15) f на $f|_{\Omega_m}$ и пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$. По теореме 1.3.1 эти задачи имеют хотя бы одно решение

v_m. Обозначим через $\tilde{v}_m$ продолжение v_m нулем на все Ω. По теореме 1.3.2 нормы $||\tilde{v}_m||_{V(\Omega)} = ||v_m||_{V(\Omega_m)}$ равномерно ограничены. Поэтому при $m \to \infty$ без ограничения общности можно считать, что $\tilde{v}_m \rightharpoonup \tilde{v}_0$ слабо в V. Покажем, что $\tilde{v}_0$ есть решение задачи (1.3.14).

Возьмем произвольное $\varphi \in \mathcal{V}$. При некотором k носитель φ лежит в Ω_k. Обозначим через v_m^* продолжение $\tilde{v}_m$ нулем за пределы Ω, суженное на B_k. Ясно, что $v_m^* \to v_0^*$ слабо в $V(B_k)$, и значит, сильно в $L_4(B_k)$.

Поэтому все слагаемые (1.3.15) с $\varepsilon = \dfrac{1}{m}, v = \tilde{v}_m$:

$$\frac{1}{m}\int\limits_\Omega \nabla(\Delta(\tilde{v}_m) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\tilde{v}_m)_i(\tilde{v}_m)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla\tilde{v}_m : \nabla\varphi\,dx -$$
$$- \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial(\tilde{v}_m)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial(\tilde{v}_m)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx +$$
$$+ 2\varkappa\int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle \quad (1.3.16)$$

сходятся к соответствующим слагаемым (1.3.14):

$$-\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\tilde{v}_0)_i(\tilde{v}_0)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla\tilde{v}_0 : \nabla\varphi\,dx -$$
$$- \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_0)_k \frac{\partial(\tilde{v}_0)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_0)_k \frac{\partial(\tilde{v}_0)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx +$$
$$+ 2\varkappa\int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle, \quad (1.3.17)$$

причем, без ограничения общности, в силу оценки (1.3.9) теоремы 1.3.2 получаем:

$$\frac{1}{m}\int\limits_\Omega \nabla(\Delta(\tilde{v}_m)) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Итак, $\tilde{v}_0$ удовлетворяет тождеству (1.3.14) при всех $\varphi \in \mathcal{V}$. Значит $\tilde{v}_0$ является слабым решением задачи (1.3.1)–(1.3.2). □

1.4 Задача оптимального управления для стационарной модели с объективной производной в реологическом соотношении

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi: V \multimap V^*$ в качестве функции управления. Будем предполагать, что отображение Ψ удовлетворяет условиям $i_1)$ – $i_4)$ стр. 29.

Будем рассматривать слабую постановку задачи оптимального управления с обратной связью для краевой задачи (1.3.1)–(1.3.2). Под обратной связью мы понимаем условие

$$f \in \Psi(v). \tag{1.4.1}$$

Определение 1.4.1. *Пара функций $(v, f) \in V \times V^*$ называется слабым решением задачи оптимального управления с обратной связью* (1.3.1)–(1.3.2), (1.4.1), *если она удовлетворяет равенству*

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx +$$
$$+ 2\varkappa \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle \tag{1.4.2}$$

для любого $\varphi \in X$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1.4.1. *Пусть отображение Ψ удовлетворяет условиям $i_1)$–$i_4)$. Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи* (1.3.1)–(1.3.2), (1.4.1).

Доказательство данной теоремы будет приведено в пункте 1.4.2.

Обозначим через $\Sigma \subset V \times V^*$ множество всех слабых решений задачи (1.3.1)–(1.3.2), (1.4.1). Рассмотрим произвольный функционал стоимости $\Phi: \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям $j_1)$–$j_2)$ стр. 30.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема:

Теорема 1.4.2. *Если отображение Ψ удовлетворяет условиям $i_1)$–$i_4)$, а функционал Φ – условиям $j_1)$, $j_2)$, то задача* (1.3.1)–(1.3.2), (1.4.1) *имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f)$.*

Доказательство теорем 1.4.1 и 1.4.2 основано на рассмотрении семейства аппроксимационных задач, доказательстве их разрешимости и последующем предельном переходе.

1.4.1 Аппроксимационная задача

Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу с малым параметром:

Задача 1.4.1. *Найти пару функций* $(v, f) \in X \times V^*$, *удовлетворяющих условию обратной связи*

$$f \in \Psi(v)$$

и равенству:

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx +$$
$$+ 2\varkappa \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi \rangle \quad (1.4.3)$$

для любого $\varphi \in X$.

Здесь ε – некоторое фиксированное положительное число.

Для исследования аппроксимационной задачи перейдем к операторной трактовке. Определим операторы A, N, B_1, B_2, B_3 с помощью следующих равенств:

$$A: \ V \to V^*, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx, \quad v, \varphi \in V,$$

$$N: \ X \to X^*, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx, \quad v, \varphi \in X,$$

$$B_1: \ L_4(\Omega)^n \to V^*, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n, \quad \varphi \in V,$$

$$B_2: \ V \to X^*, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in X,$$

$$B_3: \ V \to X^*, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \, \partial x_k} \, dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in X,$$

$$D: V \to X^*, \langle D(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v) \Big) : \nabla \varphi \, dx, \, v \in V, \varphi \in X.$$

Замечание 1.4.1. *Заметим, что V плотно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для n=2,3, значит B_1 можно рассматривать и как отображение $B_1 : V \to V^*$, а поскольку X вложено в V, то операторы A, B_i, $i = 1, 2, 3$, D можно рассматривать и как отображения $A, B_1, B_2, B_3, D : X \to X^*$. При этом, чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, определенных одной и той же формулой, но действующих в разных функциональных пространствах, когда из контекста ясно, в каких функциональных пространствах действуют операторы в данном месте текста.*

В силу произвольности функции $\varphi \in X$ в равенстве (1.4.3) задача о нахождении слабого решения аппроксимационной задачи 1.4.1 эквивалентна задаче о нахождении решения следующего операторного включения:

$$\varepsilon N v + \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = f \in \Psi(v). \tag{1.4.4}$$

Таким образом, каждое слабое решение задачи 1.4.1 является решением операторного включения (1.4.4) и обратно.

Также введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L_\varepsilon : X \to X^*, \quad L_\varepsilon(v) = \varepsilon N v;$$
$$K : X \to X^*, \quad K(v) = \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v).$$

В этих обозначениях уравнение (1.4.4) записывается в виде:

$$L_\varepsilon(v) + K(v) = f \in \Psi(v). \tag{1.4.5}$$

Заметим, что задача существования решения $(v, f) \in X \times V^*$ аппроксимационной задачи эквивалентна задаче существования решения $v \in X$ для операторного включения:

$$v \in \mathfrak{M}(v), \quad \text{где } \mathfrak{M}(v) = (L_\varepsilon)^{-1} \Big(\Psi(v) - K(v) \Big).$$

Задача (1.4.5) может быть переписана в виде

$$v \in \mathfrak{M}(v). \tag{1.4.6}$$

Замечание 1.4.2. *В силу введенных определений операторов A, L_ε, B_1, B_2, B_3, для этих операторов справедливы свойства, доказанные в параграфе 1.1.1, т.е. справедливы леммы 1.1.1–1.1.4. Аналогично в силу введенных определений операторов D и K для них справедливы свойства, доказанные в параграфе 1.3.1, т.е. справедливы леммы 1.3.1–1.3.2.*

Замечание 1.4.3. *Заметим, что равенство (1.4.2) совпадает с равенством (1.3.3) определения 1.3.1. Следовательно, априорные оценки для решений задачи (1.3.1)–(1.3.2) будут верны и для решений задачи оптимального управления с обратной связью (1.3.1)–(1.3.2), (1.4.1). Таким образом, справедлива следующая теорема:*

Теорема 1.4.3. *Если $v \in X$ – решение семейства включений $v \in \lambda\mathfrak{M}(v)$ для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\varepsilon\|v\|_X^2 \leqslant C_{21}. \tag{1.4.7}$$

Более того, при $\lambda = 1$ имеет место следующая оценка:

$$\nu\|v\|_V^2 \leqslant C_{22}. \tag{1.4.8}$$

Замечание 1.4.4. *Заметим, что операторное включение (1.4.6) совпадает с включением (1.2.6), а теорема 1.4.3 совпадает с теоремой 1.2.4. Следовательно, для операторного включения (1.4.6) справедлива следующая теорема:*

Теорема 1.4.4. *Существует хотя бы одно решение $v \in X$ операторного включения (1.4.6).*

Доказательство. Доказательство данной теоремы абсолютно аналогично доказательству теоремы 1.2.4. □

Поскольку существует решение $v \in X$ включения (1.4.6), то из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение $(v, f) \in X \times V^*$.

1.4.2 Доказательство теоремы 1.4.1

Доказательство. Положим в (1.4.3) $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m}$. В силу выбора последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. В силу теоремы 1.4.4 при каждом ε_m существует пара $(v_m, f_m) \in X \times V^* \subset V \times V^*$, которая удовлетворяет включению (1.4.1) и равенству:

$$\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx +$$
$$+ 2\varkappa \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_m) W_\rho(v_m) - W_\rho(v_m)\mathcal{E}(v_m)) : \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.4.9)$$

В силу существования априорной оценки (1.4.8) (и в силу рефлексивности пространства V) $\{v_m\}$ будет слабо сходиться к некоторому элементу $v_* \in V$.

Тогда при $m \to \infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\, dx \to \nu \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi\, dx.$$

Далее заметим:

$$\lim_{m\to\infty} \left| \varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx \right| = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\varepsilon_m} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx \right| =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sqrt{\varepsilon_m} \lim_{m\to\infty} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx \right|.$$

Без ограничения общности, в силу оценки (1.4.7) теоремы 1.4.3 получаем:

$$\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Так как V вполне непрерывно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для n=2,3, то, учитывая оценку (1.4.8), без ограничения общности можно считать, что $v_m \to v_*$ сильно в $L_4(\Omega)^n$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx.$$

В оставшихся интегралах имеем

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx.$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^n$. Таким образом, их произведение сходится слабо к $v_* \nabla v_*$ в $L_{4/3}(\Omega)^n$.

В последней части имеем:

$$\Big| \int\limits_{\Omega} \big(\mathcal{E}(v_m) W_\rho(v_m) - \mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*)\big) : \nabla\varphi\, dx \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{E}(v_m)\big(W_\rho(v_m) - W_\rho(v_*)\big) + \big(\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*)\big) W_\rho(v_*)\Big) : \nabla\varphi\, dx \Big| \le$$

$$\le \|\mathcal{E}(v_m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|W_\rho(v_m - v_*)\|_{L_\infty(\Omega)^{n^2}} +$$

$$+ \Big| \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} \mathcal{E}_{ij}(v_m - v_*)(W_\rho)_{jk}(v_*)(\nabla\varphi)_{ik}\, dx \Big| \le$$

$$\le \|\mathcal{E}(v_m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|v_m - v_*\|_{L_2(\Omega)^n} +$$

$$+ \Big| - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} \mathcal{E}_{ij}(v_m - v_*)(\nabla\varphi)_{ik}(W_\rho)_{kj}(v_*)\, dx \Big| \le$$

$$\le \|\mathcal{E}(v_m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|v_m - v_*\|_{L_4(\Omega)^n} +$$

$$+ \Big| \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \Big[(\nabla\varphi) W_\rho(v_*)\Big]\, dx \Big|.$$

Напомним, что последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^n$. Таким образом, получим:

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(v_m) W_\rho(v_m) : \nabla\varphi\, dx \to \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*) : \nabla\varphi\, dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Аналогично получим:

$$\int\limits_{\Omega} W_\rho(v_m) \mathcal{E}(v_m) : \nabla\varphi\, dx \to \int\limits_{\Omega} W_\rho(v_*) \mathcal{E}(v_*) : \nabla\varphi\, dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Принимая во внимание априорную оценку (1.4.8) и условия i_1)–i_4), без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in V^*$ такое, что $f_m \to f_* \in \Psi(v_*)$ при $m \to +\infty$.

Таким образом, переходя в равенстве (1.4.9) к пределу при $m \to +\infty$, получим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему равенству

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx -$$
$$-\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx +$$
$$+2\varkappa \int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*) - W_\rho(v_*) \mathcal{E}(v_*) \big) : \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Вспоминаем, что $v_* \in V$. Это и завершает доказательство теоремы 1.4.1.

□

1.4.3 Доказательство теоремы 1.4.2

Из теоремы 1.4.1 получаем, что множество решений Σ не пусто и ограниченно снизу. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что

$$\lim_{l \to \infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v,f) \in \Sigma} \Phi(v, f).$$

Как и ранее, используя оценку (1.4.8), не ограничивая общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, можем предположить, что

$$v_l \rightharpoonup v^* \quad \text{слабо в} \quad V,$$

$$v_l \to v^* \quad \text{сильно в} \quad L_4(\Omega)^n,$$

$$f_l \to f^* \in \Psi(v^*) \quad \text{сильно в} \quad V \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Отсюда так же, как и в предыдущем доказательстве, получим соотношения

$$\nu A v_l \rightharpoonup \nu A v_* \quad \text{слабо в} \quad V^*,$$

$$B_1(v_l) \to B_1(v_*) \quad \text{сильно в} \quad V^*,$$

$$B_2(v_l) \rightharpoonup B_2(v_*) \quad \text{слабо в} \quad X^*,$$

$$B_3(v_l) \rightharpoonup B_3(v_*) \quad \text{слабо в} \quad X^*,$$

$$D(v_l) \rightharpoonup D(v_*) \quad \text{слабо в} \quad X^* \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Переходя к пределу в соотношении

$$\nu A v_l - B_1(v_l) - \varkappa B_2(v_l) - \varkappa B_3(v_l) + 2\varkappa D(v_l) = f_l \in \Psi(v_l),$$

будем иметь $(v^*, f^*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, то придем к неравенству

$$\Phi(v^*, f^*) \leqslant \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f),$$

которое доказывает, что (v^*, f^*) – требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 1.4.2.

ГЛАВА 2
ЭВОЛЮЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ СЛАБО КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

2.1 Существование слабых решений эволюционной математической модели с объективной производной в реологическом соотношении

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. Рассматривается следующая начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) -$$
$$- 2\varkappa \mathrm{Div}\left(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right) + \mathrm{grad}\ p = f, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega; \quad (2.1.1)$$

$$\mathrm{div}\ v = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega; \quad (2.1.2)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \quad (2.1.3)$$

Для того чтобы ввести понятие слабого решения нам потребуются определения некоторых пространств:

$$\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, \ldots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \mathrm{div}\ v = 0\};$$

$$V^0 = \text{ замыкание } \mathcal{V} \text{ по норме } L_2(\Omega)^n;$$

$$V^1 = \text{ замыкание } \mathcal{V} \text{ по норме } W_2^1(\Omega)^n;$$

$$V^2 = W_2^2(\Omega)^n \cap V^1.$$

Мы будем также использовать хорошо известное разложение Вейля векторных полей из $L_2(\Omega)^n$ (см., например, [8], [14]):

$$L_2(\Omega)^n = V^0 \oplus \nabla W_2^1(\Omega),$$

где $\nabla W_2^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in W_2^1(\Omega)\}$, $\oplus$ – знак ортогональной суммы (пространства V^0 и $\nabla W_2^1(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)^n$).

Пусть $\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$ – проектор Лере. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$. Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным (подробнее см., например, в [3]). Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Отметим, что если граница области Ω принадлежит классу C^∞, то $\{e_j\}$ – собственные функции оператора A будут бесконечно дифференцируемыми.

Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ – собственные значения оператора A. Обозначим через $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел и пусть $m \in \mathbb{N}$.

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{m} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\}$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j. Определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{1/2}. \tag{2.1.4}$$

Лемма 2.1.1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{N}$, то есть α - натуральное число. На пространстве V^α норма (2.1.4) эквивалентна норме $\|\cdot\|_{W_2^\alpha(\Omega)^n}$ пространства $W_2^\alpha(\Omega)^n$.*

Доказательство этой леммы см. в [15].

В дальнейшем нам необходимы будут пространство V^1 с эквивалентной нормой (см. [7]):

$$\|v\|_{V^1} = \Big(\int_\Omega \nabla v : \nabla v \, dx \Big)^{1/2}$$

и пространство V^3 с эквивалентной нормой:

$$\|v\|_{V^3} = \Big(\int_\Omega \nabla\Delta v : \nabla\Delta v \, dx \Big)^{1/2}.$$

Также введём пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи и задачи, аппроксимирующей исходную:

1. $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0,T;V^1),\ v' \in L_2(0,T;V^{-1})\}$,
   с нормой: $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$,
2. $E_2 = \{v : v \in C([0,T],V^3),\ v' \in L_2(0,T;V^3)\}$,
   с нормой: $\|v\|_{E_2} = \|v\|_{C([0,T],V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}$.

Будем предполагать, что $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^1$.

Определение 2.1.1. *Слабым решением начально–краевой задачи* (2.1.1)–(2.1.3) *называется функция* $v \in E_1$, *удовлетворяющая для любого* $\varphi \in V^3$ *и почти всех* $t \in (0,T)$ *равенству*

$$\frac{d}{dt}\int_0^T\int_\Omega v\varphi\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\,dt + \nu\int_0^T\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx\,dt +$$
$$+\varkappa\frac{d}{dt}\int_0^T\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx\,dt - \varkappa\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx\,dt -$$
$$-\varkappa\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx\,dt +$$
$$+2\varkappa\int_0^T\int_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx\,dt = \int_0^T \langle f,\varphi\rangle\,dt \quad (2.1.5)$$

и начальному условию $v(0) = v_0$.

Замечание 2.1.1. *Задание начального условия для функции из пространства* E_1 *корректно в силу следующей леммы (см. [14]):*

Лемма 2.1.2. *Пусть* V, H, V^* *— тройка гильбертовых пространств, таких что* $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$. *Здесь вложения непрерывны,* H^* *и* V^* *— пространства, сопряженные к пространствам* H *и* V *соответственно, пространства* H *и* H^* *отождествлены по теореме Рисса. Если функция* u *принадлежит пространству* $L_2(0,T;V)$, *а её производная* u' *принадлежит* $L_2(0,T;V^*)$, *то функция* u *почти всюду равна некоторой непрерывной функции из* $[0,T]$ *в* H *(то есть функции из* $C([0,T],H)$*) и имеет место следующее равенство, которое выполняется в смысле скалярных распределений на* $(0,T)$:

$$\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = 2\langle u', u\rangle_{V^*\times V}.$$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема:

Теорема 2.1.1. *Для любых* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^1$ *начально–краевая задача* (2.1.1)–(2.1.3) *имеет хотя бы одно слабое решение* $v_* \in E_1$.

2.1.1 Аппроксимационная задача

На протяжении этого пункта будем предполагать, что $f \in L_2(0,T;V^{-1}), v_0 \in V^3$.

Для изучения разрешимости начально–краевой задачи (2.1.1)–(2.1.3) будет использоваться аппроксимационно–топологический подход к исследованию задач гидродинамики. То есть мы будем рассматривать следующую аппроксимационную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

Задача 2.1.1. *Найти функцию* $v \in E_2$, *удовлетворяющую для любого* $\varphi \in V^3$ *и почти всех* $t \in (0,T)$ *равенству*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx + \varkappa \int\limits_\Omega \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\varphi\,dx +$$
$$+ \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta(\frac{\partial v}{\partial t})\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx + 2\varkappa \int\limits_\Omega \left(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right) : \nabla\varphi\,dx =$$
$$= \langle f, \varphi\rangle \quad (2.1.6)$$

и начальному условию $v(0) = v_0$.

Отметим, что (2.1.6) отличается от (2.1.5) наличием члена

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx.$$

Далее будет доказано существование решения аппроксимационной задачи и показано, что из последовательности её решений можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению начально–краевой задачи (2.1.1)–(2.1.3) при стремлении параметра аппроксимации ε к нулю. Для этого перейдем к операторной трактовке задачи 2.1.1. Определим операторы с

помощью следующих равенств:

$$N : V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi)\, dx, \quad v, \varphi \in V^3;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n,\ \varphi \in V^1;$$

$$B_2 : V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V^1,\ \varphi \in V^3;$$

$$B_3 : V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V^1,\ \varphi \in V^3;$$

$$D : V^1 \to V^{-3}, \langle D(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi\, dx, v \in V^1, \varphi \in V^3;$$

$$J : V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega v \varphi\, dx, \quad v, \varphi \in V^3.$$

Поскольку в (2.1.6) функция $\varphi \in V^3$ произвольна, то оно эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$Jv' - B_1(v) + \nu Av + \varepsilon Nv' + \varkappa Av' - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = f \quad (2.1.7)$$

в $L_2(0, T; V^{-3})$, где $A : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi\, dx, \quad v, \varphi \in V^1$.

Таким образом, слабое решение аппроксимационной задачи – это решение $v \in E_2$ операторного уравнения (2.1.7), удовлетворяющее начальному условию $v(0) = v_0$.

Также введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varepsilon N + \varkappa A)v', v|_{t=0});$$
$$K : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3,$$
$$K(v) = (\nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v), 0)\,.$$

Тогда задача о нахождении решения уравнения (2.1.7), удовлетворяющего начальному условию $v(0) = v_0$, эквивалентна задаче о нахождении решения следующего операторного уравнения

$$L(v) + K(v) = (f, v_0). \quad (2.1.8)$$

Чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах.

Лемма 2.1.3. *Для операторов* $A, N, J + \varepsilon N + \varkappa A, J + \varkappa A, B_i$, $i = 1, 2, 3$, *имеют место следующие свойства:*

1. *Для любой* $v \in E_2$ *функция* $Av \in L_2(0, T; V^{-3})$, *оператор* $A : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3})$ *– вполне непрерывен и имеет место оценка*

$$\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_1 \|v\|_{C([0,T],V^1)}. \tag{2.1.9}$$

2. *Для любой* $v \in L_2(0, T; V^3)$ *функция* $Nv \in L_2(0, T; V^{-3})$, *оператор* $N : L_2(0, T; V^3) \to L_2(0, T; V^{-3})$ *– непрерывен и имеет место оценка:*

$$\|Nv\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant \|v\|_{L_2(0,T;V^3)}. \tag{2.1.10}$$

3. *Для любой* $v \in L_2(0, T; V^3)$ *функция* $(J + \varepsilon N + \varkappa A)v \in L_2(0, T; V^{-3})$ *и оператор* $(J + \varepsilon N + \varkappa A) : L_2(0, T; V^3) \to L_2(0, T; V^{-3})$ *– непрерывен, обратим и для него имеет место оценка*

$$\varepsilon \|v\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|(J + \varepsilon N + \varkappa A)v\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant \\ \leqslant (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3) \|v\|_{L_2(0,T;V^3)}. \tag{2.1.11}$$

   Кроме того, обратный оператор $(J + \varepsilon N + \varkappa A)^{-1} : L_2(0, T; V^{-3}) \to L_2(0, T; V^3)$ *также непрерывен.*

4. *Для любой* $v \in L_2(0, T; V^{-1})$ *функция* $(J + \varkappa A)v \in L_2(0, T; V^{-3})$, *оператор* $(J + \varkappa A) : L_2(0, T; V^{-1}) \to L_2(0, T; V^{-3})$ *непрерывен и имеет место следующая оценка*

$$C_4 \|v\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|(J + \varkappa A)v\|_{L_2(0,T;V^{-3})}. \tag{2.1.12}$$

5. *Для любой* $v \in L_4(0, T; L_4(\Omega)^n)$ *функция* $B_1(v) \in L_2(0, T; V^{-1})$ *и отображение* $B_1 : L_4(0, T; L_4(\Omega)^n) \to L_2(0, T; V^{-1})$ *– непрерывно.*

6. *Для любой* $v \in E_2$ *функция* $B_1(v) \in L_2(0, T; V^{-3})$ *и отображение* $B_1 : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3})$ *– вполне непрерывно и для него имеет место оценка:*

$$\|B_1(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_5 \|v\|^2_{C([0,T],V^1)}. \tag{2.1.13}$$

7. *Для $i = 2, 3$ и любой $v \in E_2$ функция $B_i(v) \in L_2(0, T; V^{-3})$ и отображение $B_i : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3})$ — вполне непрерывно и для него имеет место оценка*

$$\|B_i(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_6 \|v\|^2_{C([0,T],V^1)}. \tag{2.1.14}$$

Доказательство последней леммы подробно приведено в [7].

Лемма 2.1.4. *Для оператора D имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $D : V^1 \to V^{-3}$ — непрерывен и для любой функции $v \in V^1$ имеет место оценка:*

$$\|D(v)\|_{V^{-3}} \leqslant C_7 \|v\|^2_{V^1}. \tag{2.1.15}$$

2. *Для любой функции $v \in L_4(0, T; V^1)$ функция $D(v) \in L_2(0, T; V^{-3})$ и отображение $D : L_4(0, T; V^1) \to L_2(0, T; V^{-3})$ — непрерывно.*
3. *Для любой функции $v \in E_2$ функция $D(v) \in L_2(0, T; V^{-3})$ и отображение $D : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3})$ — вполне непрерывно и для него имеет место оценка*

$$\|D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_8 \|v\|^2_{C([0,T],V^1)}. \tag{2.1.16}$$

Доказательство. 1) Получим необходимые оценки для тензоров $\mathcal{E}$ и W_ρ.

$$\|\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}} = \sum_{i,j=1}^{n} \|\mathcal{E}_{ij}(v)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_9 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2 \, dx =$$

$$= C_9 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \, dx =$$

$$= C_9 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx - 2C_9 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}) \, dx +$$

$$+ C_9 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx =$$

$$= C_9 \Big[\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, dx + \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, dx \Big] = 2C_9 \|v\|^2_{V^1}.$$

$$\|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} = \sum_{i,j=1}^{n} \|(W_\rho)_{ij}(v)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{10} \sum_{i,j=1}^{n} \|(W_\rho)_{ij}(v)\|_{L_\infty(\Omega)} =$$

$$= \frac{1}{2} C_{10} \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} | \int\limits_{\Omega} \rho(x-y)(\frac{\partial v_i(t,y)}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j(t,y)}{\partial y_i}) \, dy| =$$

$$= \frac{1}{2} C_{10} \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \Big| \int\limits_{\Omega} -\frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_j} v_i(t,y) + \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_i} v_j(t,y)\, dy \Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_{11} \|\mathrm{grad}\ \rho\|_{L_2(\Omega)^n} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant C_{12} \|\mathrm{grad}\ \rho\|_{L_2(\Omega)^n} \|v(t)\|_{V^1}.$$

Далее, для любых $v \in V^1, \varphi \in V^3$ в силу определения оператора D имеем

$$|\langle D(v), \varphi\rangle| = \left| \int\limits_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{13} [\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}] \|\varphi\|_{C(\Omega)^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_{14} \|v\|_{V^1}^2 \|\varphi\|_{V^3}.$$

Отсюда и следует требуемая оценка (2.1.15).

Докажем непрерывность оператора D. Для произвольных $v^m, v^0 \in V^1$ имеем:

$$\big|\langle D(v^m), \varphi\rangle - \langle D(v^0), \varphi\rangle\big| = \Big| \int\limits_{\Omega} (\mathcal{E}(v^m) W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m)) : \nabla\varphi\, dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega} (\mathcal{E}(v^0) W_\rho(v^0) - W_\rho(v^0)\mathcal{E}(v^0)) : \nabla\varphi\, dx \Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} \int\limits_{\Omega} |\mathcal{E}(v^m) W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0) W_\rho(v^0) + W_\rho(v^0)\mathcal{E}(v^0)|\, dx \|\varphi\|_{V^3} \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} \int\limits_{\Omega} |(\mathcal{E}(v^m)(W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0)) + (\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)) W_\rho(v^0) -$$

$$- W_\rho(v^m)(\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)) - (W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0))\mathcal{E}(v^0)|\, dx \|\varphi\|_{V^3} \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} [\|(\mathcal{E}(v^m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|(W_\rho(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} +$$

$$+ \|(\mathcal{E}(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|W_\rho(v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|W_\rho(v^m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|(\mathcal{E}(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} +$$

$$+ \|(W_\rho(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|\mathcal{E}(v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}] \|\varphi\|_{V^3} \leqslant$$

$$\leqslant C_{16} [\|v^m\|_{V^1} \|v^m - v^0\|_{V^1} + \|v^m - v^0\|_{V^1} \|v^0\|_{V^1} + \|v^m\|_{V^1} \|v^m - v^0\|_{V^1} +$$

$$+ \|v^m - v^0\|_{V^1} \|v^0\|_{V^1}] \|\varphi\|_{V^3} \leqslant C_{17} (\|v^m\|_{V^1} + \|v^0\|_{V^1}) \|v^m - v^0\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^3}.$$

Отсюда следует, что

$$\big\|D(v^m) - D(v^0)\big\|_{V^{-3}} \leqslant C_{17} \left(\|v^m\|_{V^1} + \big\|v^0\big\|_{V^1}\right) \big\|v^m - v^0\big\|_{V^1}. \qquad (2.1.17)$$

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset V^1$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in V^1$. Тогда непрерывность отображения $D : V^1 \to V^{-3}$ следует из последнего неравенства.

2) Пусть $v \in L_4(0,T;V^1)$. Тогда из (2.1.15) при почти всех $t \in (0,T)$ получим оценку

$$\|D(v)(t)\|_{V^{-3}} \leqslant C_7 \|v(t)\|^2_{V^1}.$$

Возводя эту оценку в квадрат и интегрируя по t от 0 до T, получим

$$\int\limits_0^T \|D(v)(t)\|^2_{V^{-3}} dt \leqslant C_7^2 \int\limits_0^T \|v(t)\|^4_{V^1} dt = C_7^2 \|v\|^4_{L_4(0,T;V^1)}.$$

Отсюда и следует, что $D(v) \in L_2(0,T;V^{-3})$.

Докажем теперь непрерывность отображения $D : L_4(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$.

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(0,T;V^1)$ сходится к $v^0 \in L_4(0,T;V^1)$. Возведем неравенство (2.1.17) в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T. В силу неравенства Гёльдера, получим

$$\int\limits_0^T \left\|D(v^m)(t) - D(v^0)(t)\right\|^2_{V^{-3}} dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{17}^2 \int\limits_0^T \left(\|v^m(t)\|_{V^1} + \left\|v^0(t)\right\|_{V^1}\right)^2 \left\|v^m(t) - v^0(t)\right\|^2_{V^1} dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{17}^2 \left(\int\limits_0^T \left(\|v^m(t)\|_{V^1} + \left\|v^0(t)\right\|_{V^1}\right)^4 dt\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int\limits_0^T \left\|v^m(t) - v^0(t)\right\|^4_{V^1} dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, воспользовавшись неравенством Гёльдера, имеем

$$\int\limits_0^T \left(\|v^m(t)\|_{V^1} + \left\|v^0(t)\right\|_{V^1}\right)^4 dt = \sum_{i=0}^4 \frac{4!}{i!(4-i)!} \int\limits_0^T \|v^m(t)\|^i_{V^1} \left\|v^0(t)\right\|^{4-i}_{V^1} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^4 \frac{4!}{i!(4-i)!} \left(\int\limits_0^T \|v^m(t)\|^4_{V^1} dt\right)^{\frac{i}{4}} \left(\int\limits_0^T \left\|v^0(t)\right\|^4_{V^1} dt\right)^{\frac{4-i}{4}} =$$

$$= \sum_{i=0}^4 \frac{4!}{i!(4-i)!} \|v^m\|^i_{L_4(0,T;V^1)} \left\|v^0\right\|^{4-i}_{L_4(0,T;V^1)}.$$

Таким образом:

$$\left\|D(v^m) - D(v^0)\right\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_{17}^2 \|v^m - v^0\|_{L_4(0,T;V^1)} \times$$
$$\times \left(\sum_{i=0}^{4} \frac{4!}{i!(4-i)!} \|v^m\|^i_{L_4(0,T;V^1)} \left\|v^0\right\|^{4-i}_{L_4(0,T;V^1)} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $m \to +\infty$, то стремится к нулю и левая часть. Отсюда и следует, что отображение $D : L_4(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$ — непрерывно.

3) Для доказательства утверждения этого пункта мы воспользуемся следующей теоремой Симона:

Теорема 2.1.2 (Симон, [26]). *Пусть $X \subset E \subset Y$ — банаховы пространства, причем вложение $X \subset E$ вполне непрерывно, а вложение $E \subset Y$ непрерывно. Пусть $F \subset L_p(0,T;X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Будем предполагать, что для любого $f \in F$ его обобщенная производная в пространстве $D'(0,T;Y)$ принадлежит $L_r(0,T;Y)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Далее, пусть*

1. *множество F ограничено в $L_p(0,T;X)$,*
2. *множество $\{f' : f \in F\}$ ограничено в $L_r(0,T;Y)$.*

Тогда при $p < \infty$ множество F относительно компактно в $L_p(0,T;E)$, а при $p = \infty$ и $r > 1$ множество F относительно компактно в $C([0,T],E)$.

В данном случае

$$X = V^3,\ E = V^1,\ Y = V^0,$$
$$F = \{v : v \in L_4(0,T;V^3); v' \in L_2(0,T;V^0)\}.$$

Вложение $V^3 \subset V^1$ — компактно, поэтому пространство F вложено в $L_4(0,T;V^1)$ компактно.

Из непрерывности следующих вложений

$$C([0,T],V^3) \subset L_4(0,T;V^3), \quad L_2(0,T;V^3) \subset L_2(0,T;V^0)$$

следует, что $E_2 \subset F$, причём вложение непрерывно.

Из второго пункта этой леммы мы имеем, что отображение $D : L_4(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$ — непрерывно.

В итоге

$$E_2 \subset F \subset L_4(0,T;V^1) \xrightarrow{D} L_2(0,T;V^{-3}).$$

Здесь первое вложение непрерывно, второе вложение — вполне непрерывно, а отображение D — непрерывно. Таким образом, для любой функции $v \in E_2$ получим, что функция $D(v) \in L_2(0,T;V^{-3})$, а отображение $D : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ — вполне непрерывно.

Покажем теперь оценку (2.1.16). В силу неравенства (2.1.15) при всех $t \in [0,T]$ имеет место следующая оценка

$$\|D(v)(t)\|_{V^{-3}} \leqslant C_7 \|v(t)\|^2_{V^1}.$$

Возводя её в квадрат и интегрируя по t от 0 до T, получим

$$\int\limits_0^T \|D(v)(t)\|^2_{V^{-3}} dt \leqslant C_7^2 \int\limits_0^T \|v(t)\|^4_{V^1} dt \leqslant C_7^2 T \|v\|^4_{C([0,T],V^1)}.$$

Откуда и следует требуемая оценка (2.1.16) с константой $C_8 = C_7\sqrt{T}$. $\square$

Лемма 2.1.5. *Для операторов L и K имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $L : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ — обратим и обратный оператор непрерывен.*
2. *Оператор $K : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ — вполне непрерывен.*

Доказательство. *1)* Для доказательства утверждения первого пункта воспользуемся теоремой Банаха об обратном отображении.

Сначала покажем непрерывность линейного оператора

$$L : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varepsilon N + \varkappa A)v', v|_{t=0}).$$

В силу оценки (2.1.11) имеем

$$\begin{gathered}
\|L(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})\times V^3} = \|(J + \varepsilon N + \varkappa A)v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \|v|_{t=0}\|_{V^3} \leqslant \\
\leqslant (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3)\, \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{V^3} = \\
= (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3)\, \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \|v\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant \\
\leqslant (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3 + 1) \left(\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \|v\|_{C([0,T],V^3)}\right) = \\
= (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3 + 1)\, \|v\|_{E_2}.
\end{gathered}$$

Из последней оценки получаем, что оператор L непрерывен.

Покажем теперь взаимно однозначность оператора L. Для этого достаточно показать, что задача

$$(J + \varepsilon N + \varkappa A)v' = f \tag{2.1.18}$$

$$v|_{t=0} = v_0 \tag{2.1.19}$$

имеет единственное решение $v \in E_2$ для любых $f \in L_2(0, T; V^{-3}), v_0 \in V^3$.

Поскольку оператор $(J + \varepsilon N + \varkappa A)$ обратим как оператор из $L_2(0, T; V^3)$ в $L_2(0, T; V^{-3})$, то, применяя $(J + \varepsilon N + \varkappa A)^{-1}$ к уравнению (2.1.18), получим, что

$$v' = (J + \varepsilon N + \varkappa A)^{-1} f \quad \text{и} \quad v' \in L_2(0, T; V^3).$$

Откуда, в силу (2.1.19)

$$v(t) = \int\limits_0^t (J + \varepsilon N + \varkappa A)^{-1} f(s)\, ds + v_0.$$

Таким образом, из вида решения получаем, что $v \in C([0, T], V^3)$. Отсюда следует, что $v \in E_2$.

Покажем, что решение единственно. Действительно, если существует второе решение $u \in E_2\, (u \neq v)$ задачи (2.1.18),(2.1.19), то разность $(v - u)$ является решением следующей задачи:

$$(J + \varepsilon N + \varkappa A)(v' - u') = 0,$$
$$(v - u)|_{t=0} = 0.$$

Из ранее полученной формулы для решения этой задачи следует, что $u - v = 0$. Таким образом получили противоречие с нашим предположением о том, что $u \neq v$. Следовательно, оператор L взаимно однозначен.

Таким образом, в силу теоремы Банаха об обратном отображении оператор $L : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3$ обратим и обратный оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3 \to E_2$ непрерывен.

2) Вполне непрерывность оператора

$$K : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3,$$

$$K(v) = (\nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v), 0)$$

следует из вполне непрерывности операторов $A : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ лемма 2.1.3 пункт *1;* $B_1 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ *лемма 2.1.3 пункт 6;* $B_2 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ *лемма 2.1.3 пункт 7;* $B_3 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ *лемма 2.1.3 пункт 7;* $D : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ *лемма 2.1.4 пункт 3.* □

2.1.2 Априорная оценка

Вместе с уравнением (2.1.8) мы будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений

$$L(v) + \lambda K(v) = \lambda(f, v_0), \quad \lambda \in [0,1], \tag{2.1.20}$$

которое совпадает с (2.1.8) при $\lambda = 1$.

Теорема 2.1.3. *Если $v \in E_2$ — решение операторного уравнения (2.1.20) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеют место следующие оценки:*

$$\varepsilon \|v\|^2_{C([0,T],V^3)} \leqslant C_{18} + 2\varepsilon \|v_0\|^2_{V^3}, \tag{2.1.21}$$

$$\varkappa \|v\|^2_{C([0,T],V^1)} \leqslant C_{18} + 2\varepsilon \|v_0\|^2_{V^3}, \tag{2.1.22}$$

где

$$C_{18} = \frac{4T}{\varkappa} \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2\|v_0\|^2_{V^0} + 2\varkappa \|v_0\|^2_{V^1}.$$

Доказательство. Пусть $v \in E_2$ — решение (2.1.20) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, тогда для v при любом $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0,T)$ имеет место равенство:

$$\int\limits_\Omega v'(t)\varphi\,dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t)v_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \lambda\nu \int\limits_\Omega \nabla v(t) : \nabla\varphi\,dx +$$
$$+ \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla\Delta v'(t) : \nabla\Delta\varphi\,dx + \varkappa \int\limits_\Omega \nabla v'(t) : \nabla\varphi\,dx -$$
$$- \lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx - \lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx +$$
$$+ 2\lambda\varkappa \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx = \lambda\langle f(t), \varphi\rangle \tag{2.1.23}$$

и v удовлетворяет начальному условию $v(0) = \lambda v_0$.

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx + \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx = -2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-$$

$$-2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial v_k(t)}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx = -2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-$$

$$-2\int\limits_\Omega \operatorname{div} v(t)\sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}(v)(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx = -2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx.$$

Тогда (2.1.23) можно переписать в виде

$$\int\limits_\Omega v'(t)\varphi\,dx - \lambda\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \lambda\nu\int\limits_\Omega \nabla v(t):\nabla\varphi\,dx+$$

$$+\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta v'(t)\right):\nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla\left(v'(t)\right):\nabla\varphi\,dx+$$

$$+2\lambda\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+$$

$$+2\lambda\varkappa\int\limits_\Omega \left(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right):\nabla\varphi\,dx = \lambda\langle f(t),\varphi\rangle.$$

Поскольку последнее равенство имеет место при всех $\varphi\in V^3$, то оно имеет место и при $\varphi = v$.

$$\int\limits_\Omega v'(t)v(t)dx - \lambda\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx + \lambda\nu\int\limits_\Omega \nabla v(t):\nabla v(t)dx+$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta v'(t)\right):\nabla\left(\Delta v(t)\right)\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla\left(v'(t)\right):\nabla v(t)dx+$$

$$+\,2\lambda\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx+$$

$$+\,2\lambda\varkappa\int\limits_\Omega \left(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right):\nabla v\,dx = \lambda\langle f(t),v\rangle. \quad (2.1.24)$$

Преобразуем слагаемые в левой части (2.1.24) следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega} v'(t)v(t)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial\left(v(t)v(t)\right)}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v(t)v(t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0};$$

$$\varepsilon\int\limits_{\Omega} \nabla\left(\Delta v'(t)\right) : \nabla\left(\Delta v(t)\right)\,dx = \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla(\Delta v(t)) : \nabla\left(\Delta v(t)\right)\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v(t)) : \nabla\left(\Delta v(t)\right)\,dx = \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3};$$

$$\varkappa\int\limits_{\Omega} \nabla\left(v'(t)\right) : \nabla v(t)dx = \frac{\varkappa}{2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla v(t) : \nabla v(t)\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla v(t)\,dx = \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1};$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i(t)\frac{\partial(v_j(t)v_j(t))}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v_i(t)}{\partial x_i}v_j(t)v_j(t)\,dx = -\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\, v(t)\sum_{j=1}^{n} v_j(t)v_j(t)\,dx = 0;$$

$$\int\limits_{\Omega} (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla v\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : (\mathcal{E}(v) + W(v))\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \mathcal{E}(v)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : W(v)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik} - (W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ki}\mathcal{E}_{ji}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik} - (W_\rho)_{kj}\mathcal{E}_{ji}W_{ki}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik} - \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}-\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}\,dx=0.$$

Последнее равенство выполнено в силу симметричности тензора $\mathcal{E}(v)$ и кососимметричности тензоров $W_\rho(v)$ и $W(v)$.

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx+\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\,dx\right)=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)(t)dx=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\left(\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\right)}{\partial x_k}\,dx=$$

$$=-\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_k(t)}{\partial x_k}\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\mathcal{E}_{ij}(v)(t)dx=$$

$$=-\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\,v(t)\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\mathcal{E}_{ij}(v)(t)dx=0.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\,dx,$$

которое имеет место в силу симметричности тензора скоростей деформаций $\mathcal{E}$.

Таким образом, (2.1.24) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}+\lambda\nu\|v(t)\|^2_{V^1}=\lambda\langle f(t),v(t)\rangle.$$

Так как правую часть последнего равенства можно оценить сверху

$$\lambda\langle f(t),v(t)\rangle\leqslant\lambda\left|\langle f(t),v(t)\rangle\right|\leqslant\lambda\|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}\leqslant\|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1},$$

а левая часть оценивается снизу

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}+\lambda\nu\|v(t)\|^2_{V^1},$$

то в итоге при почти всех $t \in (0,T)$ получим, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1} \leqslant \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до τ, где $\tau \in [0,T]$. В силу того, что v удовлетворяет начальному условию $v(0) = v_0$, получим

$$\frac{1}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^0} - \frac{\lambda^2}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^3} - \frac{\varepsilon\lambda^2}{2}\|v_0\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^1} - \frac{\varkappa\lambda^2}{2}\|v_0\|^2_{V^1} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}\,dt.$$

Правую часть последнего неравенства можно оценить следующим образом

$$\int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}\,dt \leqslant \max_{t\in[0,\tau]}\|v(t)\|_{V^1}\int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^{-1}}dt \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^1}\int\limits_0^T \|f(t)\|_{V^{-1}}dt \leqslant \sqrt{T}\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^1}\left(\int\limits_0^T \|f(t)\|^2_{V^{-1}}dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{T}\|v\|_{C([0,T],V^1)}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера и неравенством Коши:

$$bc \leqslant \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$$

для $\delta = \frac{\varkappa}{2}$.

Таким образом, получили

$$\frac{1}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1}.$$

Из того, что

$$\frac{1}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^0} \geqslant 0,$$

следует, что

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1}.$$

Откуда, аналогично, в силу положительной определенности $\|v(\tau)\|^2_{V^3}$ и $\|v(\tau)\|^2_{V^1}$, получим следующие две оценки:

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^3} \leqslant \frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1};$$
$$\frac{\varkappa}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^1} \leqslant \frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1}.$$

Правая часть в обоих последних неравенствах не зависит от τ. Следовательно, в каждом из них можно перейти к максимуму по $\tau \in [0,T]$ в левой части:

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v\|^2_{C([0,T],V^3)} \leqslant \frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \\ + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1}; \quad (2.1.25)$$

$$\frac{\varkappa}{2}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} \leqslant \frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \\ + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1}. \quad (2.1.26)$$

Тогда из (2.1.26) непосредственно получаем (2.1.22). Для получения оценки (2.1.21) достаточно сложить неравенства (2.1.25) и (2.1.26). □

Теорема 2.1.4. *Если $v \in E_2$ — решение операторного уравнения (2.1.20) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_{19}, \quad (2.1.27)$$
$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \frac{2C_{19}}{C_4}, \quad (2.1.28)$$

где постоянная

$$C_{19} = C_{20}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + (C_{21} + C_7 + 2\varkappa C_{22})\left(\frac{C_{18} + 2\varepsilon\|v_0\|^2_{V^3}}{\varkappa}\right) + \\ \nu C_1\sqrt{\frac{C_{18} + 2\varepsilon\|v_0\|^2_{V^3}}{\varkappa}}.$$

Доказательство. Пусть $v \in E_2$ — решение (2.1.20), тогда оно удовлетворяет следующему операторному уравнению

$$v' + \varepsilon N v' + \varkappa A v' - \lambda B_1(v) + \lambda\nu A v - \lambda\varkappa B_2(v) - \lambda\varkappa B_3(v) + 2\lambda\varkappa D = \lambda f. \quad (2.1.29)$$

Следовательно,

$$\|v' + \varepsilon N v' + \varkappa A v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} =$$
$$= \|\lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda\nu A v + \lambda\varkappa B_2(v) + \lambda\varkappa B_3(v) - 2\lambda\varkappa D\|_{L_2(0,T;V^{-3})}.$$

Правую часть последнего равенства можно оценить следующим образом (напомним, что $\lambda \leqslant 1$):

$$\|\lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda\nu A v + \lambda\varkappa B_2(v) + \lambda\varkappa B_3(v) - 2\lambda\varkappa D\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda\|f\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \lambda\|B_1(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \lambda\nu\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-3})} +$$
$$+\lambda\varkappa\|B_2(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \lambda\varkappa\|B_3(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + 2\lambda\varkappa\|D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant$$
$$\leq \|f\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \|B_1(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \nu\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-3})} +$$
$$+\varkappa\|B_2(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \varkappa\|B_3(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + 2\varkappa\|D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant$$

откуда в силу непрерывного вложения $L_2(0,T;V^{-1})$ в $L_2(0,T;V^{-3})$ и оценок (2.1.9), (2.1.13), (2.1.14), (2.1.16)

$$\leqslant C_{20}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_{21}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \nu C_1\|v\|_{C([0,T],V^1)} + 2\varkappa C_{20}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} +$$
$$+C_4\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} = C_{20}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + (C_{21} + C_5 + 2\varkappa C_{22})\,\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} +$$
$$+\nu C_1\|v\|_{C([0,T],V^1)} \leqslant$$

в силу априорной оценки (2.1.22)

$$\leqslant C_{20}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + (C_{21} + C_5 + 2\varkappa C_{22})\left(\frac{C_{18} + 2\varepsilon\|v_0\|^2_{V^3}}{\varkappa}\right) +$$
$$+\nu C_1\sqrt{\frac{C_{18} + 2\varepsilon\|v_0\|^2_{V^3}}{\varkappa}}.$$

Воспользовавшись теперь оценкой (2.1.11) на левую часть (2.1.2):

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|v' + \varepsilon N v' + \varkappa A v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})},$$

мы и получим требуемое неравенство (2.1.27).

Оценка (2.1.28) получается следующим образом. Как и ранее v удовлетворяет уравнению (2.1.29), следовательно

$$\|v' + \varkappa A v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} =$$
$$= \|-\varepsilon N v' + \lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda\nu A v + \lambda\varkappa B_2(v) + \lambda\varkappa B_3(v) - 2\lambda\varkappa D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})}$$
$$\leqslant \varepsilon\,\|N v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \|\lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda\nu A v + \lambda\varkappa B_2(v) + \lambda\varkappa B_3(v) -$$
$$-2\lambda\varkappa D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant$$

аналогично проделанным выше оценкам и воспользовавшись также неравенствами (2.1.10) и (2.1.27)

$$\leqslant \varepsilon \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + C_{19} \leqslant 2C_{19}.$$

Таким образом, нами получена оценка

$$\|v' + \varkappa A v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant 2C_{19}.$$

Из этого неравенства и из оценки (2.1.12)

$$C_4 \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|(J + \varkappa A)v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})}$$

и получается (2.1.28). □

Из теорем 2.1.3 и 2.1.4 непосредственно получаем следствие:

Следствие 2.1.1. *Если v — решение операторного уравнения (2.1.20) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеют место следующая оценка:*

$$\|v\|_{E_2} \leqslant C_{23} = \sqrt{\frac{C_{18}}{\varepsilon} + 2\|v_0\|^2_{V^3}} + \frac{C_{19}}{\varepsilon}. \tag{2.1.30}$$

2.1.3 Теорема существования решения аппроксимационной задачи

Теорема 2.1.5. *Операторное уравнение (2.1.8) имеет хотя бы одно решение $v \in E_2$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

В силу априорной оценки (2.1.30) все решения семейства уравнений (2.1.20)

$$L(v) + \lambda K(v) = \lambda(f, a), \quad \text{где} \quad \lambda \in [0,1],$$

лежат в шаре $B_R \subset E_2$ радиуса $R = C_{23} + 1$ с центром в нуле. И, следовательно, все решения семейства уравнений

$$v - \lambda L^{-1}\left[-K(v) + (f, v_0)\right] = 0, \quad \text{где} \quad \lambda \in [0,1],$$

лежат в том же шаре B_R.

В силу второго пункта леммы 2.1.5 отображение $[-K(\cdot)+(f,v_0)]:E_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3$ является вполне непрерывным.

В силу первого пункта той же леммы оператор $L^{-1}:L_2(0,T;V^{-3})\times V^3\to E_2$ непрерывен.

Таким образом, отображение $L^{-1}\left[-K(\cdot)+(f,a)\right]:E_2\to E_2$ вполне непрерывно. Тогда отображение

$$G:[0,1]\times E_2\to E_2,\quad G(\lambda,v)=\lambda L^{-1}\left[-K(v)+(f,v_0)\right]$$

вполне непрерывно по совокупности переменных λ и v.

Из вышесказанного имеем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda,v)=v-G(\lambda,v)$ невырождено на границе шара B_R. Следовательно, для него определена степень Лере–Шаудера $\deg_{LS}(\Phi,B_R,0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0,\cdot),B_R,0)=\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot),B_R,0).$$

Вспомним, что $\Phi(0,\cdot)=I$ и по условию нормировки:

$$\deg_{LS}(I,B_R,0)=1.$$

Отсюда,

$$\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot),B_R,0)=1.$$

Таким образом, получили, что существует хотя бы одно решение $v\in E_2$ уравнения

$$v-L^{-1}\left[-K(v)+(f,v_0)\right]=0$$

и, следовательно, уравнения (2.1.8). □

Поскольку существует решение $v\in E_2$ уравнения (2.1.8), то из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение $v\in E_2$.

2.1.4 Доказательство теоремы 2.1.1

Доказательство. Поскольку пространство V^3 плотно в V^1, то для каждого $a_*\in V^1$ существует последовательность $a_m\in V^3$, сходящаяся к a_* в V^1. Если

$a_* \equiv 0$, то положим

$$a_m \equiv 0, \quad \varepsilon_m = \frac{1}{m}.$$

Если же $\|a_*\|_{V^1} \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, $\|a_m\|_{V^3} \neq 0$. Тогда положим

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m\|a_m\|^2_{V^3}}.$$

В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to +\infty$. Причём имеет место неравенство

$$\varepsilon_m \|a_m\|^2_{V^3} \leqslant 1. \tag{2.1.31}$$

В силу теоремы 2.1.5 при каждом ε_m и a_m существует $v_m \in E_2 \subset E_1$ — решение аппроксимационной задачи. Таким образом, каждое v_m удовлетворяет для всех $\varphi \in V^3$ при почти всех $t \in (0, T)$ равенству

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega v_m' \varphi \, dx \, dt - \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \, dt + \nu \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla \varphi \, dx \, dt +$$
$$+ \varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla (\Delta v_m') : \nabla (\Delta \varphi) \, dx \, dt + \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_m' : \nabla \varphi \, dx \, dt -$$
$$- \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx \, dt - \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx \, dt +$$
$$+ 2\varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_m) W_\rho(v_m) - W_\rho(v_m) \mathcal{E}(v_m)) : \nabla \varphi \, dx \, dt = \int\limits_0^T \langle f, \varphi \rangle \, dt. \tag{2.1.32}$$

и начальному условию:

$$v_m\big|_{t=0}(x) = a_m(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.1.33}$$

Так как последовательность $\{a_m\}$ сходится в V^1, то она ограничена по норме V^1. Следовательно,

$$2\|a_m\|^2_{V^0} + 2\varkappa \|a_m\|^2_{V^1} \leqslant C_{24}, \tag{2.1.34}$$

где C_{24} — постоянная, не зависящая от m.

Вспоминая определение констант в априорных оценках, отметим, что постоянная C_{18} из неравенства (2.1.22) на самом деле зависит от m :

$$C_{18} = \frac{4T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2\|a_m\|^2_{V^0} + 2\varkappa\|a_m\|^2_{V^1}.$$

Однако, воспользовавшись (2.1.34), её можно оценить сверху следующим образом:

$$C_{18} \leqslant \frac{4T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_{24} = C_{25}. \tag{2.1.35}$$

Таким образом, в силу неравенств (2.1.31) и (2.1.35) из оценки (2.1.22) получаем, что

$$\varkappa\|v_m\|^2_{C([0,T],V^1)} \leqslant C_{28} + 2. \tag{2.1.36}$$

Аналогично, воспользовавшись неравенствами (2.1.31) и (2.1.35), получим из оценок (2.1.27) и (2.1.28):

$$\begin{aligned}\varepsilon\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_{20}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + (C_{21} + C_5 + 2\varkappa C_{22})\left(\frac{C_{25}+2}{\varkappa}\right) + \nu C_1\sqrt{\frac{C_{25}+2}{\varkappa}},\end{aligned} \tag{2.1.37}$$

$$\begin{aligned}\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \frac{2C_{20}}{C_4}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + 2\,(C_{21} + C_5 + 2\varkappa C_{22})\left(\frac{C_{25}+2}{\varkappa C_4}\right) + \frac{2\nu C_1}{C_4}\sqrt{\frac{C_{25}+2}{\varkappa}}.\end{aligned} \tag{2.1.38}$$

В силу непрерывности вложений

$$C([0,T],V^1) \subset L_2(0,T;V^1) \quad \text{и} \quad C([0,T],V^1) \subset L_\infty(0,T;V^1)$$

и оценок (2.1.36) и (2.1.38), без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) получим, что

$$\begin{aligned} v_m &\rightharpoonup v_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^1) \quad \text{при } m \to +\infty; \\ v_m &\rightharpoonup v_* \quad {}^*\text{-слабо в } L_\infty(0,T;V^1) \quad \text{при } m \to +\infty; \\ v_m' &\rightharpoonup v_*' \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^{-1}) \quad \text{при } m \to +\infty. \end{aligned}$$

Тогда при $m \to +\infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu\int_0^T\int_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\,dx\,dt \to \nu\int_0^T\int_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi\,dx\,dt \quad \text{для любого } \varphi \in V^3.$$

Поскольку линейный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся, то при $m \to +\infty$ получим, что

$$\int\limits_{\Omega} v'_m \varphi \, dx + \varkappa \int\limits_{\Omega} \nabla v'_m : \nabla \varphi \, dx = \langle (J + \varkappa A) v'_m, \varphi \rangle \to \langle (J + \varkappa A) v'_*, \varphi \rangle =$$

$$= \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} v_* \varphi \, dx + \varkappa \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx.$$

Далее, используя оценку (2.1.37), как и выше, без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, мы имеем, что существует функция $u \in L_2(0, T; V^3)$, такая что

$$\varepsilon_m v'_m \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } L_2(0, T; V^3) \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Итак, мы имеем

$$\varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \nabla \left(\Delta v'_m \right) : \nabla \left(\Delta \varphi \right) \, dx \, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \nabla \left(\Delta u \right) : \nabla \left(\Delta \varphi \right) \, dx \, dt.$$

Однако, последовательность $\varepsilon_m v'_m$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0, T]$ со значениями в V^{-5}. На самом деле, для любых $\chi \in \mathfrak{D}([0, T]), \varphi \in V^5$, используя формулу интегрирования по частям, мы получим

$$\lim_{m \to \infty} \left| \varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \nabla \left(\Delta v'_m(t) \right) : \nabla \left(\Delta \varphi \right) \, dx \chi(t) dt \right| =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \varepsilon_m \left| \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \Delta v'_m(t) \Delta^2 \varphi \, dx \chi(t) dt \right| =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \varepsilon_m \left| \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \nabla \left(v'_m(t) \right) : \nabla \left(\Delta^2 \varphi \right) \, dx \chi(t) dt \right| =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \varepsilon_m \lim_{m \to \infty} \left| \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \nabla \left(v'_m(t) \right) : \nabla \left(\Delta^2 \varphi \right) \, dx \chi(t) dt \right| =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \varepsilon_m \lim_{m \to \infty} \left| \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^T \nabla \left(v'_m(t) \right) \chi(t) dt \right) : \nabla \left(\Delta^2 \varphi \right) \, dx \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^T \nabla v_m(t) \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} dt \right) : \nabla \left(\Delta^2 \varphi \right) \, dx \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \nabla v_m(t) : \nabla \left(\Delta^2 \varphi \right) \, dx \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} dt \right| =$$

так как v_m слабо сходится в $L_2(0,T;V^1)$ к v_*, и, следовательно, сходится к v_* и в смысле распределений, то

$$= \left| \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \nabla v_*(t) : \nabla \left(\Delta^2 \varphi \right) \, dx \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} dt \right| \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \nabla \left(\Delta v_m' \right) : \nabla \left(\Delta \varphi \right) \, dx \, dt \to 0 \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Воспользовавшись теоремой 2.1.2 получим вполне непрерывное вложение

$$F = \{ v : v \in C([0,T], V^1); v' \in L_2(0,T;V^{-1}) \} \subset C([0,T], L_4(\Omega)^n).$$

Отсюда, учитывая оценки (2.1.36) и (2.1.38), получаем, что

$$v_m \to v_*, \quad \text{сильно в } C([0,T], L_4(\Omega)^n) \quad \text{при } m \to +\infty. \tag{2.1.39}$$

Таким образом, получим, что

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \, dt \quad \text{при } m \to +\infty.$$

В следующих интегралах имеем

$$\varkappa \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx \, dt \to \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx \, dt;$$

$$\varkappa \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx \, dt \to \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx \, dt.$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $C([0,T], L_4(\Omega)^n)$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_4(0,T; L_2(\Omega)^{n^2})$. Следовательно, их произведение сходится слабо к произведению пределов.

Осталось доказать последний предельный переход.

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_m)W_\rho(v_m) - \mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*)) : \nabla\varphi \, dx \, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_m)(W_\rho(v_m) - W_\rho(v_*)) + (\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*))W_\rho(v_*)) : \nabla\varphi \, dx \, dt \leq$$

$$\leq \|\mathcal{E}(v_m)\|_{C([0,T],L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|W_\rho(v_m - v_*)\|_{L_\infty(\Omega)^{n^2}} \, dt +$$

$$+ \|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi \, dt \leq$$

$$\leq C_{26} \Big(\|\mathcal{E}(v_m)\|_{C([0,T],L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|(v_m - v_*)\|_{L_2(\Omega)^n} \, dt +$$

$$+ \|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi \, dt \Big) \leq$$

$$\leq C_{27} \Big(\|\mathcal{E}(v_m)\|_{C([0,T],L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|(v_m - v_*)\|_{L_4(\Omega)^n} \, dt +$$

$$+ \|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi \, dt \Big).$$

Вспомним, что последовательность v_m сходится к v_* сильно в $C([0,T], L_4(\Omega)^n)$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_4(0,T; L_2(\Omega)^{n^2})$. Следовательно, мы доказали

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{E}(v_m)W_\rho(v_m) : \nabla\varphi \, dx \, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*) : \nabla\varphi \, dx \, dt \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Для второй части используем тот же метод:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (W_\rho(v_m)\mathcal{E}(v_m) - W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*)) : \nabla\varphi \, dx \, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Big(W_\rho(v_m)(\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*)) + (W_\rho(v_m) - W_\rho(v_*))\mathcal{E}(v_*) \Big) : \nabla\varphi \, dx \, dt \leq$$

$$\leq \|W_\rho(v_m)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi| \, dx \, dt +$$

$$+ \|\mathcal{E}(v_*)\|_{C([0,T],L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|W_\rho(v_m - v_*)\|_{L_\infty(\Omega)^{n^2}} \, dt \leq$$

$$\leq C_{28} \Big(\|W_\rho(v_m)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi| \, dx \, dt +$$

$$+ \|\mathcal{E}(v_*)\|_{C([0,T],L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|v_m - v_*\|_{L_2(\Omega)^n} \, dt \Big) \leq$$

$$\leq C_{29} \Big(\|W_\rho(v_m)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi| \, dx \, dt +$$

$$+ \|\mathcal{E}(v_*)\|_{C([0,T],L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|v_m - v_*\|_{L_4(\Omega)^n} \, dt \Big).$$

В итоге получаем, что

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega W_\rho(v_m)\mathcal{E}(v_m) : \nabla\varphi \, dx \, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*) : \nabla\varphi \, dx \, dt \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Таким образом, переходя в равенстве (2.1.32) к пределу при $m \to +\infty$, получим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему равенству:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega v_* \varphi \, dx \, dt + \varkappa \frac{d}{dt} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi \, dx \, dt - \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \, dt +$$

$$+ \nu \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi \, dx \, dt - \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx \, dt -$$

$$-\varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt +$$

$$+2\varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*) - W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*)) : \nabla \varphi\, dx\, dt = \int\limits_0^T \langle f, \varphi \rangle\, dt.$$

В силу сильной сходимости (2.1.39) получаем, что v_m сходится к v_* поточечно на $[0, T]$. Отсюда, переходя в (2.1.33) к пределу при $m \to +\infty$ в силу выбора a_m имеем, что v_* удовлетворяет следующему начальному условию: $v_*|_{t=0} = a_*$. Так как для последовательности $\{v_m\}$ имеют место априорные оценки (2.1.36) и (2.1.38), то для v_* непосредственно получаем оценку:

$$\|v_*\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v_*'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \frac{C_{25}+2}{\varkappa} + \frac{2C_{20}}{C_4}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} +$$

$$+ 2\left(C_{21} + C_5 + 2\varkappa C_{22}\right)\left(\frac{C_{25}+2}{\varkappa C_4}\right) + \frac{2\nu C_1}{C_4}\sqrt{\frac{C_{25}+2}{\varkappa}}.$$

Отсюда получаем, что $v_* \in E_1$, что и завершает доказательство теоремы 2.1.1. □

2.2 Задача оптимального управления для эволюционной математической модели, описывающей движение слабо концентрированных растворов полимеров

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi : E_1 \multimap L_2(0,T;V^{-1})$ в качестве функции управления. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на пространстве E_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;

(Ψ2) Отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно;

(Ψ3) Отображение Ψ глобально ограничено, то есть существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} := \sup\left\{\|u\|_{L_2(0,T;V^{-1})} : u \in \Psi(v)\right\} \leq M \text{ для всех } v \in E_1;$$

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:
если $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset E_1, v_l \rightharpoonup v_0, u_l \in \Psi(v_l)$ и $u_l \to u_0$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, тогда $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Мы будем рассматривать слабую постановку задачи оптимального управления с обратной связью для начально–краевой задачи (2.1.1)–(2.1.3). Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in \Psi(v). \tag{2.2.1}$$

Будем предполагать, что начальное условие a_* принадлежит пространству V^1.

Определение 2.2.1. *Пара функций $(v,f) \in E_1 \times L_2(0,T;V^{-1})$ называется слабым решением задачи оптимального управления с обратной связью* (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.1), *если она для любого $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0,T)$*

удовлетворяет условию обратной связи (2.2.1), *тождеству*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega v\varphi\,dx\,dt-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\,dt+\nu\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx\,dt+$$
$$+\varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx\,dt-\varkappa\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx\,dt-$$
$$-\varkappa\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx\,dt+$$
$$+2\varkappa\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)):\nabla\varphi\,dx\,dt=\int\limits_0^T\langle f,\varphi\rangle\,dt,\quad(2.2.2)$$

а также начальному условию

$$v(0)=a_*.\qquad(2.2.3)$$

Первым результатом настоящего параграфа является следующая теорема:

Теорема 2.2.1. *Пусть отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* $(\Psi1)$ – $-(\Psi4)$. *Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи* (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.1).

Обозначим через $\Sigma\subset E_1\times L_2(0,T;V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.1). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi:\Sigma\to\mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

($\Phi1$) Существует число γ такое, что $\Phi(v,f)\geqslant\gamma$ для всех $(v,f)\in\Sigma$.

($\Phi2$) Если $v_m\rightharpoonup v_*$ в E_1 и $f_m\to f_*$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, то $\Phi(v_*,f_*)\leqslant\varliminf\limits_{m\to\infty}\Phi(v_m,f_m)$.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.2.2. *Если отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* $(\Psi1)-(\Psi4)$, *а функционал* Φ *удовлетворяет условиям* $(\Phi1)-(\Phi2)$, *тогда задача* (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.1) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*,f_*) *такое, что* $\Phi(v_*,f_*)=\inf\limits_{(v,f)\in\Sigma}\Phi(v,f)$.

2.2.1 Аппроксимационная задача

На протяжении этого пункта будем предполагать, что $a_* \in V^3$.

Для изучения разрешимости задачи (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.1) будет использоваться аппроксимационно–топологический подход к исследованию задач гидродинамики. То есть мы будем рассматривать следующую аппроксимационную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

Задача 2.2.1. *Найти пару функций* $(v, f) \in E_2 \times L_2(0, T; V^{-1})$, *удовлетворяющую для любого* $\varphi \in V^3$ *и почти всех* $t \in (0, T)$ *условию обратной связи* (2.2.1), *тождеству*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx + \varkappa \int\limits_\Omega \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\varphi\, dx +$$
$$+ \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta(\frac{\partial v}{\partial t})\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx -$$
$$-\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx + 2\varkappa \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle \tag{2.2.4}$$

и начальному условию

$$v(0) = a_*. \tag{2.2.5}$$

Отметим, что (2.2.4) отличается от (2.2.2) наличием члена

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\, dx.$$

Далее будет доказано существование решения этой аппроксимационной задачи и показано, что из последовательности её решений можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению задачи (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.1) при стремлении параметра аппроксимации ε к нулю. Для это перейдем к операторной трактовке аппроксимационной задачи. Аналогично

пункту 2.1.1 определим операторы с помощью следующих равенств:

$$N : V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi)\, dx, \quad v, \varphi \in V^3;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n,\ \varphi \in V^1;$$

$$B_2 : V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V^1,\ \varphi \in V^3;$$

$$B_3 : V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V^1,\ \varphi \in V^3;$$

$$D : V^1 \to V^{-3}, \langle D(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi\, dx, v \in V^1, \varphi \in V^3;$$

$$J : V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega v \varphi\, dx, \quad v, \varphi \in V^3.$$

Поскольку в (2.2.4) функция $\varphi \in V^3$ произвольна, то оно эквивалентно в $L_2(0, T; V^{-3})$ следующему операторному уравнению:

$$Jv' - B_1(v) + \nu Av + \varepsilon Nv' + \varkappa Av' - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = f, \tag{2.2.6}$$

где $A : V^1 \to V^{-1}$; $\langle Av, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi\, dx$.

Таким образом, задача существования слабого решения аппроксимационной задачи эквивалентна задаче существования решения $v \in E_2$, удовлетворяющего начальному условию (2.2.5), следующего операторного включения:

$$Jv' - B_1(v) + \nu Av + \varepsilon Nv' + \varkappa Av' - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = f \in \Psi(v). \tag{2.2.7}$$

Аналогично пункту 2.1.1 введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varepsilon N + \varkappa A)v', v|_{t=0});$$

$$K : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3,$$

$$K(v) = (\nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v), 0)\,.$$

Тогда уравнение (2.2.6), удовлетворяющее начальному условию (2.2.5), эквивалентно следующему операторному уравнению

$$L(v) + K(v) = (f, a). \tag{2.2.8}$$

Чтобы не увеличивать число обозначений, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах, но определяемых одним и тем же соотношением. Для операторов A, N, $J + \varepsilon N + \varkappa A$, $J + \varkappa A$, B_1, B_2, B_3, D, L и K имеют место свойства (2.1.3)–(2.1.4) (см. пункт 2.1.1).

2.2.2 Априорная оценка

Введем следующий оператор: $\mathcal{Y} : E_1 \to L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$; $\mathcal{Y}(v) = (\Psi(v), a_*)$. Тогда, используя последнее свойство, задача существования решения $(v, f) \in E_2 \times L_2(0, T; V^{-1})$ задачи (2.2.7), (2.2.5) эквивалентна задаче существования решения $v \in E_2$ для следующего операторного включения

$$v \in \mathcal{M}(v), \quad \text{где } \mathcal{M}(v) = L^{-1}(\mathcal{Y}(v) - K(v)).$$

Поскольку оператор L^{-1} линейный и непрерывный, а оператор K – компактный, то при помощи условий $(\Psi 1)-(\Psi 2)$ мы получаем, что многозначное отображение $\mathcal{M} : E_2 \multimap E_2$ является вполне непрерывным и имеет непустые, выпуклые и компактные значения.

Рассмотрим также следующее семейство включений

$$(J+\varepsilon N+\varkappa A)v' - \lambda B_1(v) + \lambda\nu Av - \lambda\varkappa B_2(v) - \lambda\varkappa B_3(v) + 2\lambda\varkappa D(v) = \lambda f \in \Psi(v), \tag{2.2.9}$$

где $0 \le \lambda \le 1$, v удовлетворяет начальному условию (2.2.5) и которое совпадает с (2.2.7) при $\lambda = 1$.

Замечание 2.2.1. *Заметим, что левая часть операторного включения (2.2.9) полностью совпадает с левой частью равенства (2.1.20). Следовательно для операторного включения справедливы следующие теоремы (см. пункт 2.1.2):*

Теорема 2.2.3. *Решения семейства включений* (2.2.9) *удовлетворяют следующим оценкам:*

$$\varepsilon\|v\|^2_{C([0,T],V^3)} \leqslant C_{18} + 2\varepsilon\|a\|^2_{V^3}, \tag{2.2.10}$$

$$\varkappa\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} \leqslant C_{18} + 2\varepsilon\|a\|^2_{V^3}, \tag{2.2.11}$$

где $C_{18} = \dfrac{4T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2\|a\|^2_{V^0} + 2\varkappa\|a\|^2_{V^1}$.

Теорема 2.2.4. *Если* $v \in E_2$ *— решение* (2.2.9) *для некоторого* $\lambda \in [0,1]$, *то для него имеют место следующие оценки:*

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_{19}, \tag{2.2.12}$$

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \frac{2C_{19}}{C_4}, \tag{2.2.13}$$

где постоянная

$$C_{19} = C_{20}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + (C_{21} + C_7 + 2\varkappa C_{22})\left(\frac{C_{18} + 2\varepsilon\|a\|^2_{V^3}}{\varkappa}\right) + \\ +\nu C_1\sqrt{\frac{C_{18} + 2\varepsilon\|a\|^2_{V^3}}{\varkappa}}.$$

Следствие 2.2.1. *Если* v *— решение* (2.2.9) *для некоторого* $\lambda \in [0,1]$, *то для него имеет место следующая оценка:*

$$\|v\|_{E_2} \leqslant C_{23} = \sqrt{\frac{C_{18}}{\varepsilon} + 2\|a\|^2_{V^3}} + \frac{C_{19}}{\varepsilon}. \tag{2.2.14}$$

2.2.3 Теорема существования решения аппроксимационной задачи

Теорема 2.2.5. *Операторное включение* (2.2.7) *имеет хотя бы одно решение* $v \in E_2$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей (см., например, [2]).

В силу априорной оценки (2.2.14) все решения семейства операторных включений (2.2.9) лежат в шаре $B_R \subset E_2$ радиуса $R = C_{23} + 1$ с центром

в нуле. Следовательно, $v \notin \lambda\mathcal{M}(v)$ для всех $(v,\lambda) \in \partial B_R \times [0,1]$. Используя свойство гомотопической инвариантности степени и свойство нормировки степени, получим, что

$$deg(I - \mathcal{M}, \bar{B}_R, 0) = deg(I, \bar{B}_R, 0) = 1.$$

Так как эта степень отлична от нуля, то существует хотя бы одно решение $v \in E_2$ операторного включения (2.2.7). □

Поскольку существует решение $v \in E_2$ включения (2.2.7), что из вышеприведенных рассуждений следует, то аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение $v \in E_2$.

2.2.4 Доказательство теоремы 2.2.1

Поскольку пространство V^3 плотно в V^1, то для каждого $a_* \in V^1$ существует последовательность $a_m \in V^3$, сходящаяся к a_* в V^1. Если $a_* \equiv 0$, то положим $a_m \equiv 0$, $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m}$. Если же $\|a_*\|_{V^1} \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, $\|a_m\|_{V^3} \neq 0$. Тогда положим $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m\|a_m\|^2_{V^3}}$. В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to +\infty$. Причём имеет место неравенство

$$\varepsilon_m \|a_m\|^2_{V^3} \leqslant 1. \tag{2.2.15}$$

В силу теоремы 2.2.5 при каждом ε_m и a_m существует пара функций $(v_m, f_m) \in E_2 \times L_2(0,T;V^{-1}) \subset E_1 \times L_2(0,T;V^{-1})$, которая удовлетворяет включению $f_m \in \Psi(v_m)$, равенству

$$\int_0^T \int_\Omega v_m' \varphi \, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx\, dt + \nu \int_0^T \int_\Omega \nabla v_m : \nabla \varphi \, dx\, dt +$$

$$+ \varepsilon_m \int_0^T \int_\Omega \nabla (\Delta v_m') : \nabla (\Delta \varphi) \, dx\, dt + \varkappa \int_0^T \int_\Omega \nabla v_m' : \nabla \varphi \, dx\, dt -$$

$$-\varkappa \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx\, dt - \varkappa \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx\, dt +$$

$$+ 2\varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_m)W_\rho(v_m) - W_\rho(v_m)\mathcal{E}(v_m)) : \nabla\varphi \, dx \, dt = \int\limits_0^T \langle f, \varphi \rangle \, dt \quad (2.2.16)$$

и начальному условию:

$$v_m(0) = a_m. \quad (2.2.17)$$

Так как последовательность $\{a_m\}$ сходится в V^1, то она ограничена по норме V^1. Следовательно,

$$2\|a_m\|^2_{V^0} + 2\varkappa\|a_m\|^2_{V^1} \leqslant C_{24}, \quad (2.2.18)$$

где C_{24} — постоянная, не зависящая от m.

Вспоминая определение констант в априорных оценках, отметим, что постоянная C_{18} из неравенства (2.2.11) на самом деле зависит от m. Однако, воспользовавшись (2.2.18), её можно оценить сверху следующим образом:

$$C_{18} \leqslant \frac{4T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_{24} = C_{25}. \quad (2.2.19)$$

Таким образом, в силу неравенств (2.2.15) и (2.2.19) из оценки (2.2.11) получаем, что

$$\varkappa\|v_m\|^2_{C([0,T],V^1)} \leqslant C_{28} + 2. \quad (2.2.20)$$

Аналогично, воспользовавшись неравенствами (2.2.15) и (2.2.19), получим из оценок (2.2.12) и (2.2.13):

$$\varepsilon\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_{20}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + (C_{21} + C_5 + 2\varkappa C_{22})\left(\frac{C_{25}+2}{\varkappa}\right) + \\ + \nu C_1\sqrt{\frac{C_{25}+2}{\varkappa}}, \quad (2.2.21)$$

$$\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \frac{2C_{20}}{C_4}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + 2\left(C_{21} + C_5 + 2\varkappa C_{22}\right)\left(\frac{C_{25}+2}{\varkappa C_4}\right) + \frac{2\nu C_1}{C_4}\sqrt{\frac{C_{25}+2}{\varkappa}}. \quad (2.2.22)$$

В силу непрерывности вложений $C([0,T],V^1) \subset L_2(0,T;V^1)$ и $C([0,T],V^1) \subset L_\infty(0,T;V^1)$ и оценок (2.2.20) и (2.2.22), без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) получим,

что $v_m \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$; $v_m \rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;V^1)$; $v'_m \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m \to +\infty$.

Отсюда, по определению слабой сходимости и используя линейность и ограниченность операторов при $m \to +\infty$ получим

$$\nu \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla \varphi \, dx \, dt \to \nu \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx \, dt;$$

$$\int\limits_\Omega v'_m \varphi \, dx + \varkappa \int\limits_\Omega \nabla v'_m : \nabla \varphi \, dx = \langle (J + \varkappa A) v'_m, \varphi \rangle \to \langle (J + \varkappa A) v'_*, \varphi \rangle =$$

$$= \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega v_* \varphi \, dx + \varkappa \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx.$$

Далее, используя оценку (2.2.21), как и выше, без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, мы имеем, что существует функция $u \in L_2(0,T;V^3)$, такая что $\varepsilon_m v'_m \rightharpoonup u$ слабо в $L_2(0,T;V^3)$ при $m \to +\infty$. Итак, мы имеем

$$\varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla \left(\Delta v'_m \right) : \nabla \left(\Delta \varphi \right) \, dx \, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla \left(\Delta u \right) : \nabla \left(\Delta \varphi \right) \, dx \, dt \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Однако, последовательность $\varepsilon_m v'_m$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-5}. На самом деле, для любых $\chi \in \mathfrak{D}([0,T])$, $\varphi \in V^5$, используя формулу интегрирования по частям, мы получим

$$\lim_{m\to\infty} \left| \varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla \left(\Delta v'_m(t) \right) : \nabla \left(\Delta \varphi \right) \, dx \chi(t) dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_*(t) : \nabla \left(\Delta^2 \varphi \right) \, dx \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} dt \right| \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Таким образом в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla \left(\Delta v'_m \right) : \nabla \left(\Delta \varphi \right) \, dx \, dt \to 0 \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Воспользовавшись теоремой 2.1.2 получим вполне непрерывное вложение

$$F = \{v : v \in C([0,T], V^1); v' \in L_2(0,T; V^{-1})\} \subset C([0,T], L_4(\Omega)^n).$$

Отсюда, учитывая оценки (2.2.20) и (2.2.22), получаем, что $v_m \to v_*$ сильно в $C([0,T], L_4(\Omega)^n)$ при $m \to +\infty$. Таким образом при $m \to +\infty$ получим, что

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx\, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx\, dt;$$

$$\varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt \to \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt;$$

$$\varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt \to \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt.$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $C([0,T], L_4(\Omega)^n)$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_4(0,T; L_2(\Omega)^{n^2})$. Следовательно, их произведение сходится слабо к произведению пределов.

В оставшемся предельном переходе имеем:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_m) W_\rho(v_m) - \mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*)) : \nabla \varphi\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_m)(W_\rho(v_m) - W_\rho(v_*)) + (\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*)) W_\rho(v_*)) : \nabla \varphi\, dx\, dt \le$$

$$\le C_{30} \Big(\|\mathcal{E}(v_m)\|_{C([0,T], L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|(v_m - v_*)\|_{L_4(\Omega)^n}\, dt +$$

$$+ \|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T], L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla \varphi\, dt \Big).$$

Следовательно, мы доказали

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{E}(v_m) W_\rho(v_m) : \nabla \varphi\, dx\, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*) : \nabla \varphi\, dx\, dt \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega W_\rho(v_m)\mathcal{E}(v_m) : \nabla\varphi \, dx \, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*) : \nabla\varphi \, dx \, dt \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Принимая во внимание априорные оценки (2.2.20),(2.2.22) и условия $(\Psi 1) - (\Psi 4)$, мы без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in L_2(0,T;V^{-1})$ такое, что $f_m \to f_* \in \Psi(v_*)$ при $m \to \infty$.

Таким образом переходя в каждом из членов равенства (2.2.16) к пределу при $m \to +\infty$, получим, что предельные функции (v_*, f_*) удовлетворяют равенству (2.2.2). Переходя в начальном условии (2.2.17) к пределу при $m \to +\infty$, мы получим, что v_* удовлетворяет начальному условию (2.2.3).

Так как для последовательности $\{v_m\}$ имеют место априорные оценки (2.2.20) и (2.2.22), то для v_* непосредственно получаем оценку:

$$\|v_*\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v_*'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \frac{C_{24}+2}{\varkappa} + \frac{2C_{18}}{C_4}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + 2\left(C_{19} + C_5 + 2\varkappa C_{20}\right)\left(\frac{C_{24}+2}{\varkappa C_4}\right) + \frac{2\nu C_1}{C_4}\sqrt{\frac{C_{24}+2}{\varkappa}}. \quad (2.2.23)$$

Отсюда получаем, что $v_* \in E_1$, что и завершает доказательство теоремы 2.2.1.

2.2.5 Доказательство теоремы 2.2.2

Из теоремы 2.2.1 мы получаем, что множество решений Σ не пусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v,f,)\in\Sigma} \Phi(v, f).$$

Как и ранее, используя оценку (2.2.23), мы без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, можем предположить, что $v_l \rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;V^1)$; $v_l \to v_*$ сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$; $f_l \to f_* \in \Psi(v^*)$ сильно в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m \to +\infty$.

Откуда, также как и в предыдущем доказательстве получим $\nu A v_l \rightharpoonup \nu A v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$; $(I+\varkappa A)v_l' \rightharpoonup (I+\varkappa A)v_*'$ слабо в $L_2(0,T;V^{-3})$; $B_1(v_l) \to B_1(v_*)$ сильно в $L_2(0,T;V^{-1})$; $B_2(v_l) \rightharpoonup B_2(v_*)$ слабо в $L_2(0,T;V^{-3})$; $B_3(v_l) \rightharpoonup B_3(v_*)$ слабо в $L_2(0,T;V^{-3})$ при $m \to +\infty$.

Переходя к пределу в соотношении

$$(J+\varkappa A)v_l' - B_1(v_l) + \nu A v_l + \varepsilon N v_l' - \varkappa B_2(v_l) - \varkappa B_3(v_l) + 2\varkappa D(v_l) = f_l \in \Psi(v_l),$$

мы получим, что $(v^*, f^*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, мы имеем

$$\Phi(v^*, f^*) \leq \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v,f),$$

что доказывает, что (v^*, f^*) – требуемое решение. Это и завершает доказательство.

ГЛАВА 3
АТТРАКТОРЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ СЛАБО КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

3.1 Постановка задачи и основные результаты

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей ($n = 2, 3$). Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\, (\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}) + \mathrm{grad}\, p -$$

$$- 2\varkappa \mathrm{Div}\, \big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v)\big) = f, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \quad (3.1.1)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0 \quad (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \quad (3.1.2)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0 \quad t \in (0, +\infty), \quad (3.1.3)$$

$$v|_{t=0} = a \quad x \in \Omega. \quad (3.1.4)$$

Для определения слабого решения на отрезке введём следующие пространства:

$$W_1[0,T] = \{v \colon v \in L_\infty(0,T;V^1),\ v' \in L_\infty(0,T;V^{-1})\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1[0,T]} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_\infty(0,T;V^{-1})}$; и

$$W_2[0,T] = \{v \colon v \in C([0,T];V^3),\ v' \in L_\infty(0,T;V^3)\}$$

с нормой $\|v\|_{W_2[0,T]} = \|v\|_{C([0,T];V^3)} + \|v'\|_{L_\infty(0,T;V^3)}$,

Для определения слабого решения на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем рассматривать пространство $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v, определённых почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в V^1, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_1[0,T]$, и пространство $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v класса $C(\mathbb{R}_+, V^3)$, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_2[0,T]$.

Напомним ряд необходимых нам определений и теорем из общей теории аттракторов (см., например, [28]).

Определение 3.1.1. *Пусть E, E_0 — два банаховых пространства, причем E рефлексивно и непрерывно вложено в E_0. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется траекторным полуаттрактором (пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *множество P компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;*
2. *имеет место включение $\mathrm{T}(t)P \subset P$ для всех $t \geqslant 0$ ($\mathrm{T}(t)$ – оператор сдвига ($t \geqslant 0$), действующий по следующему правилу: $\mathrm{T}(t)f(s) = f(s+t)$);*
3. *множество P является* притягивающим, *то есть для любого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в норме пространства $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, выполняется условие*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in B} \inf_{v\in P} \|\mathrm{T}(t)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} = 0$$

или эквивалентное ему условие

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in B} \inf_{v\in P} \|\mathrm{T}(t)u - v\|_{C([0,M];E_0)} = 0 \quad \forall\ M > 0.$$

Определение 3.1.2. *Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется* поглощающим *для $\mathcal{H}^+$, если для каждого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в норме $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, найдётся $t_B \geqslant 0$, такое, что $\mathrm{T}(t)B \subset P$ при $t \geqslant t_B$.*

Определение 3.1.3. *Ядром подмножества $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется множество*

$$\mathcal{K}(P) = \{u \in C(\mathbb{R}; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}; E) \colon \forall t \in \mathbb{R} \quad \Pi_+\mathrm{T}(t)u \in P\}$$

(где символ $\Pi_+ f$ обозначает сужение на $\mathbb{R}_+$ функции f, определенной на $\mathbb{R}$).

Теорема 3.1.1. *Пусть пространство траекторий $\mathcal{H}^+$ имеет траекторный полуаттрактор P. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, имеют место соотношения*

$$\Pi_+\mathcal{K}(\mathcal{H}^+) \subset \mathcal{U} = \Pi_+\mathcal{K}(\mathcal{U}) \subset \Pi_+\mathcal{K}(P) \subset P,$$

и ядро $\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)$ относительно компактно в $C(\mathbb{R}; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}; E)$.

Теорема 3.1.2. *Пусть существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Тогда существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{U}$, и справедливы соотношения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}(t), \quad t \geqslant 0; \quad \mathcal{K}(\mathcal{H}^+)(t) \subset \mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{U})(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Большое значение имеют следующие теоремы о компактности и слабой непрерывности. Пусть имеется тройка банаховых пространств $X_0 \subset F \subset X_1$, причём первое из вложений компактно, а пространство X_0 рефлексивно; пусть $T > 0$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ $(i = 1, 2)$. Рассмотрим пространство

$$W(0, T; p_0, p_1; X_0, X_1) = \{v \colon v \in L_{p_0}(0, T; X_0),\ v' \in L_{p_1}(0, T; X_1)\}$$

(производная понимается в смысле распределений на $(0, T)$ со значениями в X_1); норма в $W(0, T; p_1, p_2; X_0, X_1)$ задаётся формулой

$$\|v\|_W = \|v\|_{L_{p_0}(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L_{p_1}(0,T;X_1)}.$$

Теорема 3.1.3. *Если $p_0 < \infty$, то имеет место компактное вложение*

$$W(0, T; p_0, p_1; X_0, X_1) \subset L_{p_0}(0, T; F);$$

если $p_0 = \infty$, $p_1 > 1$, то имеет место компактное вложение

$$W(0, T; p_0, p_1; X_0, X_1) \subset C([0, T]; F).$$

Доказательство можно найти, например, в [14].

Теорема 3.1.4. *Пусть E и E_0 — два банаховых пространства, таких, что $E \subset E_0$, причем вложение непрерывно. Если функция u принадлежит $L_\infty(0, M; E)$ и непрерывна как функция со значениями в E_0, то и слабо непрерывна как функция со значениями в E.*

Доказательство можно найти, например, в [5], [14].

Будем считать заданной плотность внешних сил f, принадлежащую пространству $L_2(\Omega)^n$.

Определение 3.1.4. *Слабым решением задачи (3.1.1)—(3.1.4) на отрезке $[0, T]$ с начальным условием $a \in V^1$ будем называть функцию $v \in W_1[0, T]$,*

которая удовлетворяет тождеству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v(t)\varphi\,dx + \varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla v(t):\nabla\varphi\,dx+$$
$$+\nu\int\limits_{\Omega}\nabla v(t):\nabla\varphi\,dx - \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} v_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx-$$
$$-\varkappa\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_k(t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t)\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx - \varkappa\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega} v_k(t)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t)\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx+$$
$$+2\varkappa\int\limits_{\Omega}(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)):\nabla\varphi\,dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi\,dx \quad (3.1.5)$$

почти всюду на $(0,T)$ *для любой функции* $\varphi\in V^3$ *и начальному условию*

$$v(0)=a. \quad (3.1.6)$$

Определение 3.1.5. *Слабым решением задачи* (3.1.1)–(3.1.4) *на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *будем называть функцию* $v\in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$, *такую, что при каждом* $T>0$ *ограничение* v *на отрезок* $[0,T]$ *является слабым решением этой задачи на данном отрезке.*

Замечание 3.1.1. *Для функции* $v\in W_1[0,T]$ *имеем* $v(t)\in V\subset L_4(\Omega)^n$ *и* $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\in L_2(\Omega)$. *Для* $\varphi\in V^3\subset W_2^3(\Omega)^n$ *имеем* $\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\in W_2^1(\Omega)\subset L_4(\Omega)$ *и* $\nabla\varphi\in W_2^2(\Omega)^n\subset C(\Omega)$. *Отсюда следует, что все интегралы в левой части тождества* (3.1.5) *имеют смысл. Кроме того,*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v(t)\varphi\,dx = \frac{d}{dt}(v(t),\varphi)_0 = \langle v'(t),\varphi\rangle_{V^{-1}\times V^1},$$
$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla v(t):\nabla\varphi\,dx = \frac{d}{dt}(v(t),\varphi)_3 = \langle v'(t),\varphi\rangle_{V^{-3}\times V^3}$$

в смысле скалярных распределений.

Замечание 3.1.2. *По теореме* (3.1.4) *имеем* $W_1[0,T]\subset C_w([0,T];V^1)$. *Следовательно, начальное условие* (3.1.6) *для функции класса* $W_1[0,T]$ *имеет смысл.*

Имеет место следующая теорема о существовании решений.

Теорема 3.1.5. *При любом $a \in V^1$ задача (3.1.1)—(3.1.4) имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|v(t)\|_1 + \|v'(t)\|_{-1} \leqslant R_0 \left(1 + \|a\|_1^2 e^{-\alpha t}\right) \quad \text{п. в. } t \geqslant 0 \tag{3.1.7}$$

с постоянными $R_0 > 0$ и $\alpha > 0$, не зависящими от v.

Определение 3.1.6. *Функцию $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ будем называть траекторией задачи (3.1.1)—(3.1.4), если она является решением этой задачи с некоторым начальным условием $a \in V^1$ и удовлетворяет оценке*

$$\|v(t)\|_1 + \|v'(t)\|_{-1} \leqslant R_0 \left(1 + \|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)} e^{-\alpha t}\right) \quad \text{п. в. } t \geqslant 0. \tag{3.1.8}$$

Множество траекторий данной задачи будем называть её пространством траекторий и обозначать $\mathcal{H}^+$.

Замечание 3.1.3. *Слабые решения задачи (3.1.1)—(3.1.4) слабо непрерывны со значениями в V^1, поэтому $\|a\|_{V^1} = \|v(0)\|_{V^1} \leqslant \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)}$. Поэтому неравенство (3.1.8) является следствием неравенства (3.1.7), и из теоремы 3.1.5 следует, что любая точка $a \in V^1$ служит началом некоторой траектории.*

Зададим число $0 < \delta < 1$.

Сформулируем основные результаты о существовании аттракторов.

Теорема 3.1.6. *Пусть $f \in L_2(\Omega)^n$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Аттрактор ограничен в $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, компактен в $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$; он притягивает в топологии пространства $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$ семейства траекторий, ограниченные в $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$.*

Теорема 3.1.7. *Существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Аттрактор ограничен в V^1, компактен в $V^{1-\delta}$; он притягивает в топологии пространства $V^{1-\delta}$ семейства траекторий, ограниченные в $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$.*

3.2 Аппроксимационная задача

Для изучения задачи (3.1.5), (3.1.6) используется аппроксимационная задача. Чтобы её сформулировать, введём следующие операторы:

$$J : V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega v\varphi\, dx \quad v, \varphi \in V^3;$$

$$N\colon V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\Delta\, v) : \nabla(\Delta\, \varphi)\, dx \quad (v \in V^3,\ \varphi \in V^3);$$

$$B_1\colon L_4(\Omega)^n \to V^{-1},\ \langle B_1(v), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx\ (v \in L_4(\Omega)^n,\ \varphi \in V^1);$$

$$B_2\colon V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\ (v \in V^1,\ \varphi \in V^3);$$

$$B_3\colon V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\ (v \in V^1,\ \varphi \in V^3);$$

$$D : V^1 \to V^{-3}, \quad \langle D(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx (v \in V^1, \varphi \in V^3).$$

Также введём специальное обозначение для экспоненциальной функции: для $\beta \in \mathbb{R}$ положим

$$e_\beta(t) = e^{\beta t}.$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Аппроксимацией тождества (3.1.5) служит следующее тождество:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega v(t)\varphi\, dx + \varepsilon e^{-\alpha t} \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \nabla(\Delta\, v(t)) : \nabla(\Delta\, \varphi)\, dx + \varkappa \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \nabla v(t) : \nabla\varphi\, dx +$$
$$+ \nu \int\limits_\Omega \nabla v(t) : \nabla\varphi\, dx - \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \varkappa \sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega v_k(t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx -$$
$$- \varkappa \sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega v_k(t) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx +$$
$$+ 2\varkappa \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx = \int\limits_\Omega f\varphi\, dx \quad (\varphi \in V^3). \quad (3.2.1)$$

При $\varepsilon \to 0$ это тождество переходит в (3.1.5).

В дальнейшем мы будем рассматривать не само тождество (3.2.1), а порождаемое им операторное уравнение

$$(J + \varepsilon e_{-\alpha} N + \varkappa A)v' + \nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = \tilde{f}, \tag{3.2.2}$$

где $\tilde{f} = \pi f$, π — проектор Лере, и функционал $\tilde{f}$ действует по правилу

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} f\varphi \, dx \quad (\varphi \in V^3).$$

Замечание 3.2.1. *Функция $v \in W_2[0,T]$ называется решением уравнения (3.2.2) на отрезке $[0,T]$, если при подставновке её в уравнение получается равенство в $L_1(0,T;V^{-3})$. Функция $v \in W_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$ называется решением уравнения (3.2.2) на полуоси $\mathbb{R}_+$, если она является его решением на каждом конечном отрезке.*

Ясно, что при рассмотрении уравнения (3.2.2) в классе W_2, состоящем из непрерывных функций со значениями в V^3, его можно снабжать начальным условием

$$v(0) = b \quad (b \in V^3). \tag{3.2.3}$$

Разрешимость задачи (3.2.2), (3.2.3) устанавливается топологическими методами. Для этого при заданном $\varepsilon > 0$ рассматривается семейство задач, зависящее от параметра $\lambda \in [0,1]$:

$$(J + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} N + \varkappa A)v' + \lambda\left(\nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v)\right) = \lambda\tilde{f}, \tag{3.2.4}$$

$$v(0) = \lambda b. \tag{3.2.5}$$

Понятие решения для уравнения (3.2.4) вводится точно так же, как для (3.2.2).

В задаче (3.2.4), (3.2.5) λ играет роль параметра нелинейной деформации. При $\lambda = 1$ задача (3.2.4), (3.2.5) превращается в задачу (3.2.2), (3.2.3), а при $\lambda = 0$ — в значительно более простую линейную задачу, разрешимость которой может быть установлена. В дальнейшем мы рассмотрим эту деформацию более детально.

Замечание 3.2.2. *Пусть $v \in W_2[0,T]$ — решение уравнения (3.2.4) на $[0,T]$ при некотором $\lambda \in [0,1]$. Из свойств операторов Лемма 3.2.1– Лемма 3.2.4 следует, что левая часть (3.2.4) принадлежит $L_\infty(0,T;V^{-3})$, и тем более уравнение можно считать выполненным в $L_2(0,T;V^{-3})$.*

Также потребуется следующее семейство операторов, зависящее от параметра $\lambda \in [0,1]$:

$$L_\lambda \colon W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3}) \times V^3, \quad L_\lambda(v) = ((I + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} N + \varkappa A)v', v(0))\,;$$
$$K \colon W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3}) \times V^3,$$
$$K(v) = (\nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v), 0)\,.$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{\nu}{K_0^2 + \varkappa} \tag{3.2.6}$$

и будем пользоваться этим обозначением на протяжении всей работы.

Чтобы не увеличивать число обозначений, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах, но определяемых одним и тем же соотношением. Имеют место следующие Леммы (см., например, [5],[7]).

Лемма 3.2.1. *Для операторов A,N,$J + \varepsilon N + \varkappa A$, B_i, $i = 1,2,3$, имеют место следующие свойства:*

1. *Пусть $T > 0$ — произвольное фиксированное число. Оператор $A : W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ вполне непрерывен и для любого $v \in V^1$ имеет место оценка:*
$$\|Av\|_{-1} \leqslant \|v\|_1. \tag{3.2.7}$$
2. *Для любой функции $v \in L_2(0,T;V^3)$ функция $Nv \in L_2(0,T;V^{-3})$, оператор $N : L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-3})$ — непрерывен и для любой функции $v \in V^3$ имеет место оценка*
$$\|Nv\|_{-3} \leqslant \|v\|_3. \tag{3.2.8}$$
3. *Для любой функции $v \in L_2(0,T;V^{-1})$ функция $(J + \varkappa A)v \in L_2(0,T;V^{-3})$, оператор $(J + \varkappa A) : L_2(0,T;V^{-1}) \to L_2(0,T;V^{-3})$ непрерывен и для любой функции $v \in V^{-1}$ имеет место следующая оценка*
$$C_0\|v\|_{-1} \leqslant \|(J + \varkappa A)v\|_{-3}, \tag{3.2.9}$$
где константа C_0 не зависит от функции v.

4. *Линейный оператор* $J + \varepsilon N + \varkappa A\colon V^3 \to V^{-3}$ *непрерывен, обратим и для него имеет место оценка*

$$\varepsilon\|v\|_3 \leqslant \|(J + \varepsilon N + \varkappa A)v\|_{-3} \leqslant (C_1 + \varepsilon + \varkappa C_2)\|v\|_3, \tag{3.2.10}$$

где C_1, C_2 *— некоторые постоянные, зависящие от* n *и области* Ω *и не зависящие от функции* v.

Обратный к нему оператор $(J + \varepsilon N + \varkappa A)^{-1}\colon V^{-3} \to V^3$ *непрерывен.*

5. *Для любой функции* $v \in W_2[0,T]$ *функция* $B_1(v) \in L_\infty(0,T;V^{-3})$ *и отображение* $B_1\colon W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ *вполне непрерывно и для него имеет место оценка:*

$$\|B_1(v)\|_{-1} \leqslant C_3\|v\|^2_{L_4(\Omega)^n} \tag{3.2.11}$$

с постоянной C_3, *не зависящей от* v.

6. *При* $i = 2,3$ *для любой функции* $v \in W_2[0,T]$ *функция* $B_i(v) \in L_\infty(0,T;V^{-3})$ *и отображение* $B_i\colon W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ *вполне непрерывно и имеет место следующая оценка*

$$\|B_i(v)\|_{-3} \leqslant C_4\|v\|^2_1 \tag{3.2.12}$$

с постоянной C_4, *не зависящей от функции* $v \in V^1$.

Лемма 3.2.2. *Линейный оператор*

$$J + \varepsilon e_{-\beta} N + \varkappa A\colon L_\infty(0,T;V^3) \to L_\infty(0,T;V^{-3}),$$

где $\beta \in (0,\alpha]$, *постоянная* α *задаётся формулой* (3.2.6), *непрерывен и обратим. Причём обратный оператор*

$$(J + \varepsilon e_{-\beta} N + \varkappa A)^{-1} : L_\infty(0,T;V^{-3}) \to L_\infty(0,T;V^3)$$

непрерывен.

Лемма 3.2.3. *Отображение пространств*

$$[0,1] \times L_\infty(0,T;V^{-3}) \to L_\infty(0,T;V^3),$$

действующее по правилу

$$(\lambda, v) \mapsto (J + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} N + \varkappa A)^{-1} v \tag{3.2.13}$$

непрерывно.

Сформулируем и докажем необходимые нам свойства оператора D.

Лемма 3.2.4. *Для оператора D имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $D : V^1 \to V^{-3}$ — непрерывен и для любой функции $v \in V^1$ имеет место оценка:*

$$\|D(v)\|_{-3} \leqslant C_5 \|v\|_1^2. \tag{3.2.14}$$

2. *Для любой функции $v \in L_\infty(0,T;V^1)$ функция $D(v) \in L_\infty(0,T;V^{-3})$ и отображение $D : L_\infty(0,T;V^1) \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ — непрерывно.*
3. *Для любой функции $v \in W_2[0,T]$ функция $D(v) \in L_\infty(0,T;V^{-3})$ и отображение $D : W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ — вполне непрерывно.*

Доказательство. 1) Получим необходимые оценки для тензоров $\mathcal{E}$ и W_ρ.

$$\|\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}} = \sum_{i,j=1}^n \|\mathcal{E}_{ij}(v)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_6 \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2 \, dx =$$

$$= C_6 \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \, dx =$$

$$= C_6 \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx - 2C_6 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j}) \, dx + C_6 \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx =$$

$$= C_6 \Big[\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v \, dx + \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v \, dx \Big] = 2C_6 \|v\|_1^2.$$

$$\|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} = \sum_{i,j=1}^n \|(W_\rho)_{ij}(v)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_7 \sum_{i,j=1}^n \|(W_\rho)_{ij}(v)\|_{L_\infty(\Omega)} =$$

$$= \frac{1}{2} C_7 \sum_{i,j=1}^n \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\int\limits_\Omega \rho(x-y)(\frac{\partial v_i(t,y)}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j(t,y)}{\partial y_i}) \, dy| =$$

$$= \frac{1}{2} C_7 \sum_{i,j=1}^n \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\int\limits_\Omega -\frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_j} v_i(t,y) + \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_i} v_j(t,y) \, dy| \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \|grad\rho\|_{L_2(\Omega)^n} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant C_9 \|grad\rho\|_{L_2(\Omega)^n} \|v(t)\|_1$$

Далее для любых $v \in V^1, \varphi \in V^3$ в силу определения оператора D имеем

$$|\langle D(v), \varphi \rangle| = \left| \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\big[\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\big]\|\varphi\|_{C(\Omega)^n} \leqslant$$
$$\leqslant C_{11}\|v\|_1^2\|\varphi\|_3.$$

Отсюда и следует требуемая оценка (3.2.14).

Докажем непрерывность оператора D. Для произвольных $v^m, v^0 \in V^1$ имеем:

$$\big|\langle D(v^m),\varphi\rangle - \langle D(v^0),\varphi\rangle\big| = \Big|\int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v^m)W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m)) : \nabla\varphi\, dx -$$
$$- \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v^0)W_\rho(v^0) - W_\rho(v^0)\mathcal{E}(v^0)) : \nabla\varphi\, dx\Big| \leqslant$$
$$\leqslant C_{12}\int\limits_\Omega \big|\mathcal{E}(v^m)W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)W_\rho(v^0) + W_\rho(v^0)\mathcal{E}(v^0)\big|\, dx\|\varphi\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant C_{12}\int\limits_\Omega \big|(\mathcal{E}(v^m)(W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0)) + (\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0))W_\rho(v^0) -$$
$$-W_\rho(v^m)(\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)) - (W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0))\mathcal{E}(v^0)\big|\, dx\|\varphi\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant C_{12}\big[\|(\mathcal{E}(v^m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\|(W_\rho(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} +$$
$$+\|(\mathcal{E}(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\|W_\rho(v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} +$$
$$+\|W_\rho(v^m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\|(\mathcal{E}(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} +$$
$$+\|(W_\rho(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\|\mathcal{E}(v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\big]\|\varphi\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant C_{13}[\|v^m\|_1\|v^m - v^0\|_1 + \|v^m - v^0\|_1\|v^0\|_1 + \|v^m\|_1\|v^m - v^0\|_1 +$$
$$+\|v^m - v^0\|_1\|v^0\|_1]\|\varphi\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant C_{14}(\|v^m\|_1 + \|v^0\|_1)\|v^m - v^0\|_1\|\varphi\|_3.$$

Отсюда следует, что

$$\big\|D(v^m) - D(v^0)\big\|_{-3} \leqslant C_{14}\left(\|v^m\|_1 + \big\|v^0\big\|_1\right)\big\|v^m - v^0\big\|_1. \tag{3.2.15}$$

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset V^1$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in V^1$. Тогда непрерывность отображения $D : V^1 \to V^{-3}$ следует из последнего неравенства.

2) Пусть $v \in L_\infty(0,T;V^1)$. Тогда из (3.2.14) при почти всех $t \in (0,T)$ получим оценку

$$\|D(v)(t)\|_{-3} \leqslant C_5\|v(t)\|_1^2.$$

Оценивая правую часть этого неравенства сверху, получаем, что при почти всех $t \in [0,T]$ имеет место оценка

$$\|D(v)(t)\|_{-3} \leqslant C_5 \|v(t)\|^2_{L_\infty(0,T;V^1)},$$

из которой и следует, что $D(v) \in L_\infty(0,T;V^{-3})$.

Для доказательства непрерывности оператора $D : L_\infty(0,T;V^1) \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ воспользуемся оценкой (3.2.15), которая имеет место для любых $v_m, v_0 \in V^1$.

Таким образом, для любых $v_m, v_0 \in L_\infty(0,T;V^1)$ при почти всех $t \in [0,T]$ имеет место неравенство:

$$\left\|D(v^m)(t) - D(v^0)(t)\right\|_{-3} \leqslant C_{14}(\|v^m(t)\|_1 + \left\|v^0(t)\right\|_1) \left\|(v^m - v^0)(t)\right\|_1 .$$

Оценим правую часть этого неравенства сверху. Получим, что

$$\left\|D(v^m)(t) - D(v^0)(t)\right\|_{-3} \leqslant C_{14}(\|v^m\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \\ + \left\|v^0\right\|_{L_\infty(0,T;V^1)}) \left\|v^m - v^0\right\|_{L_\infty(0,T;V^1)} .$$

при почти всех $t \in [0,T]$.

Перейдем теперь в левой части последнего неравенства к vrai max. Имеем

$$\left\|D(v^m) - D(v^0)\right\|_{L_\infty(0,T;V^{-3})} \leqslant C_{14}(\|v^m\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \\ + \left\|v^0\right\|_{L_\infty(0,T;V^1)}) \left\|v^m - v^0\right\|_{L_\infty(0,T;V^1)} .$$

Пусть произвольная последовательность $\{v^m\}$ элементов пространства $L_\infty(0,T;V^1)$ сходится сильно к некоторой функции $v^0 \in L_\infty(0,T;V^1)$. Тогда из последнего неравенства следует, что последовательность $D(v^m)$ сходится к $D(v^0)$ по норме пространства $L_\infty(0,T;V^{-3})$. А это и означает, что отображение $D : L_\infty(0,T;V^1) \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ – непрерывно.

3) Для доказательства утверждения этого пункта мы воспользуемся следующей теоремой 2.1.2.

В данном случае

$$X = V^3,\ E = V^1,\ Y = V^0,$$
$$F = \{v : v \in L_\infty(0,T;V^3); v' \in L_\infty(0,T;V^0)\}.$$

Вложение $V^3 \subset V^1$ — компактно, поэтому пространство F вложено в $([0,T];V^1)$ компактно.

Отметим, что $W_2[0,T] \subset F$, причем вложение непрерывно. На самом деле, это следует из непрерывности следующих вложений:

$$C([0,T],V^3) \subset L_\infty(0,T;V^3), \quad L_\infty(0,T;V^3) \subset L_\infty(0,T;V^0).$$

Таким образом

$$W_2[0,T] \subset F \subset C([0,T],V^1) \subset L_\infty(0,T;V^1) \xrightarrow{D} L_\infty(0,T;V^{-3}).$$

Здесь первое и третье вложения непрерывны, второе вложение — вполне непрерывно, а отображение D — непрерывно. Таким образом для любой функции $v \in W_2[0,T]$ получим, что функция $D(v) \in L_\infty(0,T;V^{-3})$, а отображение $D : W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ — вполне непрерывно. □

Лемма 3.2.5. *При любом* $\lambda \in [0,1]$ *оператор*

$$L_\lambda \colon W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3}) \times V^3$$

обратим и обратный оператор $L_\lambda^{-1}(g,a)$ *непрерывен по совокупности переменных* $g \in L_\infty(0,T;V^{-3})$, $a \in V^3$, $\lambda \in [0,1]$.

Доказательство. Чтобы доказать существование обратного оператора, рассмотрим уравнение

$$L_\lambda(v) = (g,a), \tag{3.2.16}$$

где в правой части $g \in L_\infty(0,T;V^{-3})$, $a \in V^3$, и получим явную формулу для решения этого уравнения. Уравнение (3.2.16) эквивалентно уравнению

$$(J + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} N + \varkappa A)v' = g, \tag{3.2.17}$$

снабженному начальным условием

$$v(0) = a. \tag{3.2.18}$$

По лемме 3.2.2 в силу обратимости оператора

$$(J + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} N + \varkappa A) : L_\infty(0,T;V^3) \to L_\infty(0,T;V^{-3})$$

из уравнения (3.2.17) можно выразить v':

$$v' = (J + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} N + \varkappa A)^{-1} g, \tag{3.2.19}$$

при этом $v' \in L_\infty(0, T; V^3)$.

Проинтегрируем (3.2.19) от 0 до t, $t \in [0, T]$. Тогда с учетом начального условия (3.2.18), получим

$$v(t) = a + \int\limits_0^t (J + \varepsilon e^{-\lambda\alpha s} N + \varkappa A)^{-1} g(s)\, ds, \quad t \in [0, T]. \tag{3.2.20}$$

Таким образом, если решение уравнения (3.2.16) существует, то оно дается формулой (3.2.20) и потому единственно.

Покажем, что формула (3.2.20) действительно определяет решение уравнения. По лемме 3.2.2 подынтегральная функция принадлежит пространству $L_\infty(0, T; V^3)$, поэтому $v \in C([0, T], V^3)$. Продифференцировав (3.2.20), получаем, что производная v' удовлетворяет уравнению (3.2.19) и, следовательно, принадлежит $L_\infty(0, T; V^3)$. Таким образом, $v \in W_2[0, T]$. Следовательно, v удовлетворяет уравнению (3.2.17) и начальному условию (3.2.18), поэтому v является решением уравнения (3.2.16).

Таким образом, обратимость оператора L_λ доказана, а формула (3.2.20) является явным выражением обратного оператора L_λ^{-1}.

Докажем непрерывность обратного оператора. Рассмотрим сходящиеся последовательности $g_m \to g_0$ в $L_\infty(0, T; V^{-3})$, $a_m \to a_0$ в V^3, $\lambda_m \to \lambda_0$. Пусть

$$v_m = L_{\lambda_m}^{-1}(g_m, a_m), \quad v_0 = L_{\lambda_0}^{-1}(g_0, a_0).$$

В соответствии с (3.2.19) имеем

$$v_m' = (J + \varepsilon e_{-\lambda_m\alpha} N + \varkappa A)^{-1} g_m,$$

и в силу леммы 3.2.3 получаем, что производные v_m' сходятся к v_0' по норме $L_\infty(0, T; V^3)$.

Тогда для самих функций имеем

$$\|v_m - v_0\|_{C([0,T],V^3)} = \max_{t\in[0,T]} \left\| \left(a_m + \int\limits_0^t v_m'(s)\, ds \right) - \left(a_0 + \int\limits_0^t v_0'(s)\, ds \right) \right\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant \|a_m - a_0\|_3 + T\|v_m' - v_0'\|_{L_\infty(0,T;V^3)} \to 0.$$

Таким образом, последовательность $\{v_m\}$ сходится к v_0 в пространстве $W_2[0,T]$, и непрерывность обратного оператора доказана. $\square$

Лемма 3.2.6. *Оператор* $K\colon W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3}) \times V^3$ *является компактным.*

Доказательство. Утверждение следует из определения оператора K и компактности операторов A, B_i $(i = 1,2,3)$ и D в соответствующих пространствах (см. леммы 3.2.1, 3.2.4). $\square$

3.3 Априорные оценки

Теорема 3.3.1. *Пусть* $v \in W_2[0,T]$ *– решение уравнения* (3.2.4) *на отрезке* $[0,T]$ $(T > 0)$ *при некоторых* $\lambda \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$. *Тогда при всех* $t \in [0,T]$ *имеет место оценка*

$$\|v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\alpha t}\|v(t)\|_3^2 \leqslant R_1\left(1 + \left(\|v(0)\|_1^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2\right)e^{-\lambda\alpha t}\right) \tag{3.3.1}$$

с постоянной R_1, *не зависящей от* λ, ε, v.

Доказательство. Применим обе части уравнения (3.2.4) к $v(t)$. При этом заметим, что

$$\langle v'(t), v(t)\rangle = (v'(t), v(t))_0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2,$$
$$\langle e^{-\lambda\alpha t}Nv'(t), v(t)\rangle = e^{-\lambda\alpha t}(v'(t), v(t))_3 = e^{-\lambda\alpha t}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2,$$
$$\langle Av'(t), v(t)\rangle = (v'(t), v(t))_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_1^2,$$

а также $\langle B_i(v(t)), v(t)\rangle = 0$ $(i = 1,2,3)$ в силу известных свойств операторов B_i [7].

$$\langle D(v), v\rangle = \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla v\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : (\mathcal{E}(v) + W(v))\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \mathcal{E}(v)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)):W(v)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik}-(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ki}\mathcal{E}_{ji}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}-(W_\rho)_{kj}\mathcal{E}_{ji}W_{ki}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik}-\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}-\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}\,dx=0$$

Имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2+\frac{\varepsilon}{2}e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_1^2+\lambda\nu\|v(t)\|_1^2=\lambda\langle\tilde{f},v(t)\rangle. \quad (3.3.2)$$

Покажем, как из равенства (3.3.2) можно вывести оценку диссипативного типа с убывающей экспонентой. Оценим правую часть равенства (3.3.2) с помощью неравенства Коши:

$$\langle\tilde{f},v(t)\rangle=\int\limits_{\Omega}f\cdot v(t)\,dx=\int\limits_{\Omega}\tilde{f}\cdot v(t)\,dx\leqslant\|\tilde{f}\|_{-1}\|v(t)\|_1\leqslant\frac{1}{2\nu}\|\tilde{f}\|_{-1}^2+\frac{\nu}{2}\|v(t)\|_1^2.$$

Отсюда и из (3.3.2) получаем

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2+\varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|_1^2+\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2+\lambda\nu\|v(t)\|_1^2\leqslant\frac{\lambda}{\nu}\|\tilde{f}\|_{-1}^2. \quad (3.3.3)$$

Рассмотрим на V^1 вспомогательную норму $\|u\|^2=\|u\|_0^2+\varkappa\|u\|_1^2$, эквивалентную норме $\|\cdot\|_1$. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2+\varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|_1^2=\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2;\ \nu\|v(t)\|_1^2\geqslant\frac{\nu}{K_0^2+\varkappa}\|v(t)\|^2=\alpha\|v(t)\|^2.$$

Таким образом, из неравенства (3.3.3) мы получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2+\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2+\lambda\alpha\|v(t)\|^2\leqslant\frac{\lambda}{\nu}\|\tilde{f}\|_{-1}^2.$$

В первом и третьем слагаемых левой части выполним подстановку $v(t)=\bar{v}(t)\exp(-\lambda\alpha t/2)$, имеем:

$$-\lambda\alpha e^{-\lambda\alpha t}\|\bar{v}(t)\|^2+e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)\|^2+\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2+\lambda\alpha e^{-\lambda\alpha t}\|\bar{v}(t)\|^2\leqslant\frac{\lambda}{\nu}\|\tilde{f}\|_{-1}^2.$$

Умножив обе части неравенства на $e^{\lambda\alpha t}$, получаем

$$\frac{d}{dt}(\|\bar{v}(t)\|^2 + \varepsilon\|v(t)\|_3^2) \leqslant \frac{\lambda}{\nu}\|\tilde{f}\|_{-1}^2 e^{\lambda\alpha t}.$$

Проинтегрировав последнее неравенство, получаем при всех t

$$\|\bar{v}(t)\|^2 + \varepsilon\|v(t)\|_3^2 \leqslant \|v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2 + \frac{1}{\alpha\nu}\|\tilde{f}\|_{-1}^2 \left(e^{\lambda\alpha t} - 1\right),$$

(это верно как при $\lambda > 0$, так и при $\lambda = 0$) и, умножив обе части на $e^{-\lambda\alpha t}$, имеем:

$$\|v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\|v(t)\|_3^2 \leqslant \frac{1}{\alpha\nu}\|\tilde{f}\|_{-1}^2 + \left(\|v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2\right) e^{-\lambda\alpha t}.$$

В силу эквивалентности норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ из последнего неравенства следует оценка

$$\|v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\alpha t}\|v(t)\|_3^2 \leqslant R_1 \left(1 + \left(\|v(0)\|_1^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2\right) e^{-\lambda\alpha t}\right)$$

с постоянной R_1, не зависящей от λ, ε, v. □

Теорема 3.3.2. *Для любой функции $v \in V^1$ имеет место оценка*

$$\|f - \nu Av + B_1(v) + \varkappa B_2(v) + \varkappa B_3(v) - 2\varkappa D(v)\|_{-3} \leqslant C_{15}\left(1 + \|v\|_1^2\right) \quad (3.3.4)$$

с постоянной C_{15}, не зависящей от v.

Доказательство. Используя оценку (3.2.7), для произвольной функции $v \in V^1$ имеем

$$\|Av\|_{-3} \leqslant C_{16}\|Av\|_{-1} \leqslant C_{16}\|v\|_1 \leqslant C_{16}(1 + \|v\|_1^2). \quad (3.3.5)$$

Здесь мы воспользовались неравенством:

$$b \leqslant 1 + b^2,$$

которое имеет место для любого $b \in \mathbb{R}$.

В силу оценки (3.2.11) для любой функции $v \in V^1$ получим

$$\|B_1(v)\|_{-3} \leqslant C_{16}\|B_1(v)\|_{-1} \leqslant C_3 C_{16}\|v\|_{L_4(\Omega)^n}^2 \leqslant C_3 C_{16} C_{17}\|v\|_{V^1}^2. \quad (3.3.6)$$

Напомним также, что из (3.2.12) и (3.2.14) для любой функции $v \in V^1$ имеем

$$\|B_2(v)\|_{-3} \leqslant C_4\|v\|_1^2; \tag{3.3.7}$$

$$\|B_3(v)\|_{-3} \leqslant C_4\|v\|_1^2; \tag{3.3.8}$$

$$\|D(v)\|_{-3} \leqslant C_5\|v\|_1^2. \tag{3.3.9}$$

Таким образом, из (3.3.5)-(3.3.9) для любой функции $v \in V^1$ получаем

$$\|f - \nu Av + B_1(v) + \varkappa B_2(v) + \varkappa B_3(v) - 2\varkappa D(v)\|_{-3} \leqslant C_{16}\,\|f\|_{-3} + \nu\,\|Av\|_{-3} +$$
$$+ \|B_1(v)\|_{-3} + \varkappa\,\|B_2(v)\|_{-3} + \varkappa\,\|B_3(v)\|_{-3} + 2\varkappa\,\|D(v)\|_{-3} \leqslant C_{16}\,\|f\|_{-3} +$$
$$+\nu C_{16}(1 + \|v\|_1^2) + C_3C_{16}C_{17}\|v\|_1^2 + 2\varkappa C_4\|v\|_1^2 +$$
$$+2\varkappa C_5\|v\|_1^2 \leqslant C_{15}\left(1 + \|v\|_1^2\right),$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 3.3.3. *Пусть $v \in W_2[0,T]$ — решение уравнения (3.2.4) на отрезке $[0,T]$ $(T > 0)$ при некоторых $\lambda \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$. Тогда при почти всех $t \in [0,T]$ имеет место оценка*

$$\|v'(t)\|_{-1} + \varepsilon e^{-\alpha t}\|v'(t)\|_{-3} \leqslant C_{18}\left(1 + \left(\|v(0)\|_1^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2\right)e^{-\lambda\alpha t}\right) \tag{3.3.10}$$

с постоянной C_{18}, не зависящей от λ, ε, v, t.

Доказательство. Так как функция $v \in W_2[0,T]$ является решением уравнения (3.2.4) на отрезке $[0,T]$ $(T > 0)$ при некоторых $\lambda \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$, то при почти всех $t \in [0,T]$ справедливо равенство

$$(J + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}N + \varkappa A)v'(t) + \lambda(\nu Av(t) - B_1(v)(t) -$$
$$-\varkappa B_2(v)(t) - \varkappa B_3(v)(t) + 2\varkappa D(v)(t)) = \lambda f,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$(J + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}N + \varkappa A)v'(t) = \lambda(f - \nu Av(t) + B_1(v)(t) +$$
$$+\varkappa B_2(v)(t) + \varkappa B_3(v)(t) - 2\varkappa D(v)(t)).$$

При помощи неравенства (3.3.4) мы можем оценить правую часть последнего равенства при почти всех $t \in [0,T]$ следующим образом:

$$\|\lambda\left(f - \nu Av(t) + B_1(v)(t) + \varkappa B_2(v)(t) + \varkappa B_3(v)(t) - 2\varkappa D(v)(t)\right)\|_{-3} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda\|f - \nu Av(t) + B_1(v)(t) + \varkappa B_2(v)(t) + \varkappa B_3(v)(t) - 2\varkappa D(v)(t)\|_{-3} \leqslant$$
$$\leqslant C_{15}\left(1 + \|v(t)\|_1^2\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\lambda \leqslant 1$.

Таким образом, получим, что при почти всех $t \in [0,T]$ имеет место неравенство:

$$\|(J + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}N + \varkappa A)v'(t)\|_{-3} \leqslant C_{15}\left(1 + \|v(t)\|_1^2\right) \tag{3.3.11}$$

с константой C_{15}, не зависящей от λ, ε, v, t.

Далее, воспользовавшись неравенством (3.2.10), при почти всех $t \in [0,T]$ получим неравенство:

$$\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\|v'(t)\|_3 \leqslant \|(J + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}N + \varkappa A)v'(t)\|_{-3}. \tag{3.3.12}$$

Таким образом, из (3.3.11) и (3.3.12) при почти всех $t \in [0,T]$ имеет место неравенство:

$$\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\|v'(t)\|_3 \leqslant C_{15}\left(1 + \|v(t)\|_1^2\right). \tag{3.3.13}$$

Аналогично предыдущему, если $v \in W_2[0,T]$ является решением уравнения (3.2.4) на отрезке $[0,T]$, $(T > 0)$ при некоторых $\lambda \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$, то при почти всех $t \in [0,T]$ справедливо следующее равенство:

$$(J + \varkappa A)v'(t) = -N(\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}v'(t)) + \lambda(f - \nu Av(t) + B_1(v)(t) +$$
$$+\varkappa B_2(v)(t) + \varkappa B_3(v)(t) - 2\varkappa D(v)(t)).$$

Аналогично, оценивая правую часть последнего равенства с помощью неравенства (3.3.4) и пользуясь тем, что $\lambda \leqslant 1$, при почти всех $t \in [0,T]$ получим

$$\| - N(\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}v'(t)) + \lambda(f - \nu Av(t) + B_1(v)(t) + \varkappa B_2(v)(t) + \varkappa B_3(v)(t) -$$
$$-2\varkappa D(v)(t))\|_{-3} \leqslant \|N(\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}v'(t))\|_{-3} + \|f - \nu Av(t) + B_1(v)(t) + \varkappa B_2(v)(t) +$$
$$+\varkappa B_3(v)(t) - 2\varkappa D(v)(t)\|_{-3} \leqslant \|N(\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}v'(t))\|_{-3} + C_{15}\left(1 + \|v(t)\|_1^2\right) \leqslant$$

учитывая неравенство (3.2.8), имеем

$$\leqslant \|\varepsilon e^{-\lambda\alpha t} v'(t)\|_3 + C_{15}\left(1 + \|v(t)\|_1^2\right) \leqslant \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\|v'(t)\|_3 + C_{15}\left(1 + \|v(t)\|_1^2\right) \leqslant$$

наконец, воспользовавшись неравенством (3.3.13), получим

$$\leqslant 2C_{15}\left(1 + \|v(t)\|_1^2\right).$$

В итоге при почти всех $t \in [0, T]$ имеем оценку:

$$\|(J + \varkappa A)v'(t)\|_{-3} \leqslant 2C_{15}\left(1 + \|v(t)\|_1^2\right). \tag{3.3.14}$$

В силу неравенства (3.2.9) при почти всех $t \in [0, T]$ выполнено, что

$$C_0\|v'(t)\|_{-1} \leqslant \|(J + \varkappa A)v'(t)\|_{-3}. \tag{3.3.15}$$

Таким образом, из (3.3.14) и (3.3.15) при почти всех $t \in [0, T]$ имеет место неравенство:

$$\|v'(t)\|_{-1} \leqslant \frac{2C_{15}}{C_0}\left(1 + \|v(t)\|_1^2\right).$$

Складывая последнее неравенство с (3.3.13), получаем, что

$$\|v'(t)\|_{-1} + \varepsilon e^{-\alpha t}\|v'(t)\|_3 \leqslant \left(\frac{2C_{15}}{C_0} + C_{15}\right)\left(1 + \|v(t)\|_1^2\right).$$

Наконец, оценивая правую часть последнего неравенства с помощью неравенства (3.3.1), мы и получаем требуемую оценку (3.3.10). □

Теорема 3.3.4. *Пусть $v \in W_2[0, T]$ — решение уравнения (3.2.4) на отрезке $[0, T]$ $(T > 0)$ при некоторых $\lambda \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$. Тогда при почти всех $t \in [0, T]$ имеет место неравенство*

$$\|v(t)\|_1 + \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha t/2}\|v(t)\|_3 + \|v'(t)\|_{-1} + \varepsilon e^{-\alpha t}\|v'(t)\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant R_2\left(1 + \left(\|v(0)\|_1^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2\right) e^{-\lambda\alpha t}\right). \tag{3.3.16}$$

Если v — решение уравнения (3.2.4) на $\mathbb{R}_+$, то неравенство (3.3.16) выполняется при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$. В неравенстве (3.3.16) константа R_2 не зависит от ε, λ, t и v.

Доказательство. Поскольку, при всех $t \in [0,T]$ мы имеем, что

$$\|v(t)\|_1 \leqslant 1 + \|v(t)\|_1^2$$

и

$$\sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha t/2} \|v(t)\|_3 \leqslant 1 + \varepsilon e^{-\alpha t} \|v(t)\|_3^2,$$

то из неравенства (3.3.1) получаем

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_1 + \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha t/2} \|v(t)\|_3 \leqslant 2 + \|v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\alpha t} \|v(t)\|_3^2 \leqslant \\ \leqslant 2 + R_1 \left(1 + \left(\|v(0)\|_1^2 + \varepsilon \|v(0)\|_3^2\right) e^{-\lambda \alpha t}\right) \leqslant \\ \leqslant C_{19} \left(1 + (\|v(0)\|_1^2 + \varepsilon \|v(0)\|_3^2) e^{-\lambda \alpha t}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.3.10) и следует требуемая оценка (3.3.16). □

3.4 Существование решений

Сформулируем основную теорему о разрешимости аппроксимационной задачи.

Теорема 3.4.1. *При любом $b \in V^3$ задача (3.2.2), (3.2.3) имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$. Всякое решение этой задачи удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_1 + \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha t/2} \|v(t)\|_3 + \|v'(t)\|_{-1} + \varepsilon e^{-\alpha t} \|v'(t)\|_3 \leqslant \\ \leqslant R_2 \left(1 + \left(\|v(0)\|_1^2 + \varepsilon \|v(0)\|_3^2\right) e^{-\lambda \alpha t}\right) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

почти всюду на $\mathbb{R}_+$ с постоянной R_2, не зависящей от ε, λ и v.

Доказательство теоремы 3.4.1 естественно распадается на два шага: установление разрешимости на конечном отрезке $[0,T]$ с произвольным $T > 0$ и установление разрешимости на $\mathbb{R}_+$.

I этап. Пусть $T > 0$. Покажем, что задача (3.2.2), (3.2.3) имеет решение на отрезке $[0,T]$.

Напомним, что в силу Леммы 3.2.5 при любом $\lambda \in [0,1]$ линейный оператор

$$L_\lambda \colon W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3}) \times V^3$$

ограничен, обратим и обратный оператор $L_\lambda^{-1}(g,a)$ непрерывен по совокупности переменных $g \in L_\infty(0,T;V^{-3})$, $a \in V^3$, $\lambda \in [0,1]$. Также в силу Леммы 3.2.6 оператор $K \colon W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3}) \times V^3$ компактен.

Рассмотрим семейство уравнений

$$L_\lambda v + \lambda K(v) = \lambda(f, b), \tag{3.4.2}$$

зависящих от параметра $\lambda \in [0, 1]$. При каждом λ уравнение (3.4.2) эквивалетно задаче (3.2.4), (3.2.5). В частности, уравнение (3.4.2), соотвествующее значению параметра $\lambda = 1$, эквивалентно задаче (3.2.2), (3.2.3). Заметим, что из неравенства (3.3.16) следует, что решения семейства уравнений (3.4.2) (если они существуют) удовлетворяют априорной оценке

$$\|v\|_{C([0,T];V^3)} + \varepsilon e^{-\alpha T}\|v'\|_{L_\infty(0,T;V^3)} \leqslant C_{20}, \tag{3.4.3}$$

где C_{20} — постоянная, не зависящая от λ (но зависящая, вообще говоря, от остальных параметров уравнения): в самом деле, из неравенства (3.3.16) следует, что для почти всех $t \in [0, T]$ имеем, что нормы $\|v(t)\|_3$ и $e^{-\alpha T}\|v'(t)\|_3$ ограничены величиной

$$R_2(1 + (\lambda^2\|a\|_1^2 + \varepsilon\lambda^2\|a\|_3^2))e^{-\lambda\alpha t} \leqslant R_2(1 + (\|a\|_1^2 + \varepsilon\|a\|_3^2)),$$

а правая часть последнего неравенства не зависит от t и λ. Из неравенства (3.4.3) следует, что для решений уравнения (3.4.2) выполняется также априорная оценка

$$\|v\|_{W_2[0,T]} \leqslant R, \tag{3.4.4}$$

где постоянная R не зависит от λ.

Применим к обеим частям (3.4.2) оператор L_λ^{-1} и запишем полученное уравнение в виде

$$v - \lambda L_\lambda^{-1}((f, a) - K(v)) = 0.$$

Отображение $(\lambda, v) \mapsto \lambda L_\lambda^{-1}((f, a) - K(v))$ компактно по совокупности переменных, поскольку его можно представить в виде композиции компактного отображения

$$I \times ((f, a) - K)\colon [0, 1] \times W_2[0, T] \to [0, 1] \times (L_\infty(0, T; V^{-3}) \times V^3)$$

и непрерывного отображения

$$\lambda L_\lambda^{-1}\colon [0, 1] \times (L_\infty(0, T; V^{-3}) \times V^3) \to W_2[0, T].$$

В частности, при фиксированном λ оператор $I - \lambda L_\lambda^{-1}((f,a) - \lambda K)$ представляет собой вполне непрерывное векторное поле в пространстве $W_2[0,T]$. В силу априорной оценки (3.4.4) это векторное поле не обращается в 0 на границе шара B_{R+1} радиуса $R+1$, поэтому топологическая степень Лере—Шаудера векторного поля определена при каждом $\lambda \in [0,1]$, и отображение

$$\Phi(\lambda, v) = v - \lambda L_\lambda^{-1}((f,a) - \lambda K(v))$$

является гомотопией на шаре B_{R+1} вполне непрерывных векторных полей $\Phi(0,\cdot) = I$ и $\Phi(1,\cdot) = I - L_1^{-1}((f,a) - K(\cdot))$. В силу гомотопической инвариантности степени Лере—Шаудера имеем

$$\deg_{\mathrm{LS}}(I - L_1^{-1}((f,a) - K(\cdot)), B_{R+1}, 0) = \deg_{\mathrm{LS}}(I, B_{R+1}, 0) = 1.$$

Поскольку степень поля $I - L_1^{-1}((f,a) - K(\cdot))$ отлична от 0, то существует по крайней мере одно решение $v \in W_2[0,T]$ операторного уравнения

$$v - L_1^{-1}((f,a) - K(v)) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (3.4.2) с $\lambda = 1$, а оно, в свою очередь, эквивалентно задаче (3.2.2), (3.1.6). Следовательно, разрешимость задачи (3.2.2), (3.2.3) на отрезке $[0,T]$ доказана.

II этап. Для доказательства разрешимости на $\mathbb{R}_+$ нам потребуется следующая лемма:

Лемма 3.4.1. *Пусть $\{v_m\}$ — ограниченная последовательность в пространстве $L_\infty(0,T;V^1)$, а последовательность производных $\{v_m'\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^{-1})$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *Последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна в пространстве $C(0,T;V^{1-\delta})$.*
2. *Существует подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящаяся к предельной функции v_* в пространстве $C(0,T;V^{1-\delta})$, причем имеют место пре-*

дельные соотношения

$$Av_{m_k} \rightharpoonup Av_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-1}); \tag{3.4.5}$$

$$(I+\varkappa A)v'_{m_k} \rightharpoonup (I+\varkappa A)v'_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-3}); \tag{3.4.6}$$

$$B_1(v_{m_k}) \to B_1(v_*) \text{ сильно в } L_\infty(0,T;V^{-1}); \tag{3.4.7}$$

$$B_2(v_{m_k}) \rightharpoonup B_2(v_*) \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-3}); \tag{3.4.8}$$

$$B_3(v_{m_k}) \rightharpoonup B_3(v_*) \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-3}); \tag{3.4.9}$$

$$D(v_{m_k}) \rightharpoonup D(v_*) \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-3}). \tag{3.4.10}$$

3. *Если последовательность $\{v'_m\}$ ограничена в норме пространства $L_\infty(0,T,V^3)$, то без ограничения общности можно считать, что*

$$Nv'_{m_k} \rightharpoonup Nv'_* \qquad \text{слабо в } L_2(0,T;V^{-3}). \tag{3.4.11}$$

4. *Если $\varepsilon_m \to 0$ — такая числовая последовательность, что последовательность $\{\varepsilon_m v'_m\}$ ограничена в норме пространства $L_\infty(0,T,V^3)$, то без ограничения общности можно считать, что*

$$\varepsilon_{m_k} N v'_{m_k} \rightharpoonup 0 \qquad \text{слабо в } L_2(0,T;V^{-3}).$$

Доказательство. *1)* Воспользуемся теоремой 2.1.2. В данном случае

$$X = V^1, \quad E = V^{1-\delta}, \quad Y = V^{-1},$$
$$F = \{v\colon v \in L_\infty(0,T;V^1);\ v' \in L_\infty(0,T;V^{-1})\}.$$

Так как вложение $V^1 \subset V^{1-\delta}$ компактно, то выполнены все условия теоремы 2.1.2 и из неё следует, что пространство F компактно вложено в $C([0,T],V^{1-\delta})$.

Из условий леммы следует, что последовательность $\{v_m\}$ ограничена в F, поэтому она относительно компактна в $C([0,T],V^{1-\delta})$. Заменив в этих рассуждениях δ на $\frac{1}{4}$, делаем вывод, что последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна и в пространстве $C([0,T],V^{3/4})$.

2) Последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна в пространстве $C([0,T],V^{1-\delta})$, поэтому она имеет подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящуюся в $C([0,T],V^{1-\delta})$ к некоторой функции v_*. Тогда

$$v'_{m_k} \dashrightarrow v'_* \quad \text{в смысле распределений } \mathfrak{D}'(0,T;V^{-3}).$$

Перейдем от нерефлексивных пространств L_∞ к рефлексивным пространствам L_p, чтобы можно было воспользоваться слабой компактностью ограниченных множеств. Поскольку пространство L_∞ непрерывно вкладывается в L_p с $p \geqslant 1$, то последовательности $\{v_m\}$ и $\{v'_m\}$ ограничены в нормах пространств $L_4(0,T;V^1)$ и $L_2(0,T;V^{-1})$ соответственно. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что

$$v_{m_k} \rightharpoonup v_* \qquad \text{слабо в } L_2(0,T;V^1), \tag{3.4.12}$$

$$v'_{m_k} \rightharpoonup v'_* \qquad \text{слабо в } L_2(0,T;V^{-1}). \tag{3.4.13}$$

В силу леммы 3.2.1 линейный оператор $A\colon L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$ ограничен. Значит он переводит слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся. Таким образом из сходимости (3.4.12) непосредственно следует сходимость (3.4.5).

Аналогично, лемма 3.2.1 даёт нам непрерывность линейного оператора $J+\varkappa A\colon L_2(0,T;V^{-1}) \to L_2(0,T;V^{-3})$. Следовательно, в силу сходимости (3.4.13) получаем сходимость (3.4.6).

Выше было показано, что последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна в $C([0,T],V^{3/4})$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\{v_{m_k}\}$ сходится к v_* в $C([0,T],V^{3/4})$. Так как при $n=2,3$ имеют место вложения $V^{3/4} \subset (W_2^{3/4}(\Omega))^n \subset L_4(\Omega)^n$, то

$$v_{m_k} \to v_* \qquad \text{сильно в } L_\infty(0,T;L_4(\Omega)^n). \tag{3.4.14}$$

Таким образом соотношение (3.4.7) следует из непрерывности оператора $B_1 : L_\infty(0,T;L_4(\Omega)^n) \to L_\infty(0,T;V^{-1})$.

Переходим к доказательству сходимостей (3.4.8) и (3.4.9). Требуется доказать, что для всякой функции $\varphi \in L_2(0,T;V^3)$ имеют место сходимости:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_{m_k})_k(t) \frac{\partial (v_{m_k})_i(t)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j(t)}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt \to \tag{3.4.15}$$

$$\to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k(t) \frac{\partial (v_*)_i(t)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j(t)}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt \tag{3.4.16}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_{m_k})_k(t) \frac{\partial (v_{m_k})_j(t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j(t)}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt \to \tag{3.4.17}$$

$$\to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k(t) \frac{\partial (v_*)_j(t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j(t)}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt. \tag{3.4.18}$$

Поскольку в силу (3.4.14) последовательность $\{v_{m_k}\}$ сходится сильно к v_* в $L_\infty(0,T;L_4(\Omega)^n)$, а в силу (3.4.12) последовательность $\{\nabla v_{m_k}\}$ сходится слабо к ∇v_* в $L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})$, то их произведение сходится слабо к произведению пределов. Отсюда и следуют сходимости (3.4.17) и (3.4.15), которые и означают сходимости (3.4.8) и (3.4.9).

Осталось доказать сходимость (3.4.10):

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_{m_k}) W_\rho(v_{m_k}) - \mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*)) : \nabla\varphi\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_{m_k})(W_\rho(v_{m_k}) - W_\rho(v_*)) + (\mathcal{E}(v_{m_k}) - \mathcal{E}(v_*)) W_\rho(v_*)) : \nabla\varphi\, dx\, dt \le$$

$$\le \|\mathcal{E}(v_{m_k})\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|W_\rho(v_{m_k} - v_*)\|_{L_\infty(\Omega)^{n^2}}\, dt +$$

$$+ \|W_\rho(v_*)\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \mathcal{E}(v_{m_k} - v_*) : \nabla\varphi\, dt \le$$

$$\le C_{21} \Big(\|\mathcal{E}(v_{m_k})\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|(v_{m_k} - v_*)\|_{L_2(\Omega)^n}\, dt +$$

$$+ \|W_\rho(v_*)\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi\, dt \Big) \le$$

$$\le C_{22} \Big(\|\mathcal{E}(v_{m_k})\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|(v_{m_k} - v_*)\|_{L_4(\Omega)^n}\, dt +$$

$$+ \|W_\rho(v_*)\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi\, dt \Big).$$

Вспомним, что последовательность v_{m_k} сходится к v_* сильно в $L_\infty(0,T;L_4(\Omega)^n)$, а $\nabla(v_{m_k})$ сходится к ∇v_* слабо в $L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})$. Следовательно мы доказали

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \mathcal{E}(v_{m_k})W_\rho(v_{m_k}) : \nabla\varphi\,dx\,dt \to \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*) : \nabla\varphi\,dx\,dt.$$

Для второй части используем тот же метод:

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (W_\rho(v_{m_k})\mathcal{E}(v_{m_k}) - W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*)) : \nabla\varphi\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \Big(W_\rho(v_{m_k})(\mathcal{E}(v_{m_k}) - \mathcal{E}(v_*)) + (W_\rho(v_{m_k}) - W_\rho(v_*))\mathcal{E}(v_*)\Big) : \nabla\varphi\,dx\,dt \le$$

$$\le \|W_\rho(v_{m_k})\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)^{n^2})}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega |\mathcal{E}(v_{m_k} - v_*) : \nabla\varphi|\,dx\,dt +$$

$$+\|\mathcal{E}(v_*)\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\int\limits_0^T \|W_\rho(v_{m_k} - v_*)\|_{L_\infty(\Omega)^{n^2}}\,dt \le$$

$$\le C_{23}\Big(\|W_\rho(v_{m_k})\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)^{n^2})}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega |\mathcal{E}(v_{m_k} - v_*) : \nabla\varphi|\,dx\,dt +$$

$$+\|\mathcal{E}(v_*)\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\int\limits_0^T \|v_{m_k} - v_*\|_{L_2(\Omega)^n}\,dt\Big) \le$$

$$\le C_{24}\Big(\|W_\rho(v_{m_k})\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)^{n^2})}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega |\mathcal{E}(v_{m_k} - v_*) : \nabla\varphi|\,dx\,dt +$$

$$+\|\mathcal{E}(v_*)\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\int\limits_0^T \|v_{m_k} - v_*\|_{L_4(\Omega)^n}\,dt\Big).$$

В итоге получаем, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega W_\rho(v_{m_k})\mathcal{E}(v_{m_k}) : \nabla\varphi\,dx\,dt \to \int\limits_0^T\int\limits_\Omega W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*) : \nabla\varphi\,dx\,dt.$$

Отсюда и следуют сходимость (3.4.10).

3) Без ограничения общности можно считать, что $\{v'_{m_k}\}$ сходится к v'_* слабо в $L_2(0,T,V^3)$. В силу леммы 3.2.1 линейный оператор $N\colon L_2(0,T,V^3) \to L_2(0,T,V^{-3})$ непрерывен, поэтому мы и имеем слабую сходимость (3.4.11).

4) Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\varepsilon_{m_k} v'_{m_k}\}$ слабо сходится в $L_2(0,T,V^3)$ к некоторой предельной функции u. Линейный оператор $N\colon L_2(0,T,V^3) \to L_2(0,T,V^{-3})$ непрерывен (лемма 3.2.1), поэтому имеем слабую сходимость

$$N(\varepsilon_m v'_m) \rightharpoonup Nu.$$

Покажем, что $Nu = 0$. Возьмем некоторую функцию $\varphi \in E_\infty$. Для произвольной функции $\chi \in \mathfrak{D}(0,T)$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \left| \int_0^T \langle N(\varepsilon_m v'_m(t)), \varphi \rangle \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla \left(\Delta(\varepsilon_{m_k} v'_{m_k}(t)) \right) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx \right) \chi(t) dt \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \varepsilon_{m_k} \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla \left(\Delta(v'_{m_k}(t)) \right) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx \right) \chi(t)\, dt \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \varepsilon_{m_k} \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^T \left(\int_\Omega \Delta(v'_{m_k}(t))(\Delta^2\varphi)\, dx \right) \chi(t)\, dt \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \varepsilon_{m_k} \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla \left(v'_{m_k}(t) \right) : \nabla(\Delta^2\varphi)\, dx \right) \chi(t)\, dt \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \varepsilon_{m_k} \lim_{k\to\infty} \left| \int_\Omega \left(\int_0^T \nabla \left(v'_{m_k}(t) \right) \chi(t)\, dt \right) : \nabla(\Delta^2\varphi)\, dx \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \varepsilon_{m_k} \lim_{k\to\infty} \left| \int_\Omega \left(\int_0^T \nabla \left(v_{m_k}(t) \right) \chi'(t)\, dt \right) : \nabla(\Delta^2\varphi)\, dx \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \varepsilon_{m_k} \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla v_{m_k}(t) : \nabla(\Delta^2\varphi)\, dx \right) \chi'(t)\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla v_*(t) : \nabla(\Delta^2 \varphi)\, dx \right) \chi'(t)\, dt \right| \lim_{k\to\infty} \varepsilon_{m_k} = 0.$$

Это значит, что последовательность $\langle N(\varepsilon_{m_k} v'_{m_k}), \varphi\rangle$ сходится к 0 в смысле распределений. Следовательно,

$$\langle Nu, \varphi\rangle = 0 \tag{3.4.19}$$

почти всюду.

Рассмотрим теперь счетное множество $\{\varphi_l\} \subset E_\infty$, плотное в V^3. Из равенства (3.4.19) следует, что для всех t из некоторого подмножества полной меры отрезка $[0, T]$ имеем

$$\langle Nu(t), \varphi_l\rangle = 0$$

при каждом l. В силу плотности множества $\{\varphi_l\}$ отсюда следует, что $Nu(t) = 0$ при почти всех t, что и требовалось. □

Пусть v_m — решение задачи (3.2.2), (3.2.3) на отрезке $[0, m]$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Продолжим функции v_m на полуось $\mathbb{R}_+$:

$$\hat{v}_m(t) = \begin{cases} v(t), & 0 \leqslant t \leqslant m, \\ v(m), & t \geqslant m. \end{cases}$$

Очевидно, функции $\hat{v}_m$ принадлежат пространству $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $0 < \delta < 1$. Возьмём произвольное $T > 0$. Отбросив, если нужно, несколько первых членов последовательности, можем считать, что функции $\{\hat{v}_m\}$ являются решениями задачи (3.2.2), (3.2.3) на отрезке $[0, T]$. Так как функции $\hat{v}_m$ имеют одно и то же значение b в точке 0, то из теоремы 3.4.1 следует, что они удовлетворяют оценке

$$\|\hat{v}_m\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|\hat{v}_m\|_{L_\infty(0,T;V^3)} + \|\hat{v}'_m\|_{L_\infty(0,T;V^3)} + \|\hat{v}'_m\|_{L_\infty(0,T;V^{-1})} \leqslant C(\varepsilon, T) \tag{3.4.20}$$

с постоянной $C(\varepsilon, T)$, не зависящей от m. Таким образом, последовательность $\{\hat{v}_m\}$ ограничена в $L_\infty(0, T; V^1)$, а последовательность производных $\{\hat{v}'_m\}$ ограничена в $L_\infty(0, T; V^{-1})$. Из теоремы 3.1.3 следует, что последовательность $\{\hat{v}_m\}$ относительно компактна в $C([0, T]; V^{1-\delta})$. В силу произвольности T отсюда следует, что эта последовательность относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$.

Таким образом, последовательность $\{\hat{v}_m\}$ содержит подпоследовательность $\{\hat{v}_{m_k}\}$, сходящуюся в $C(\mathbb{R}_+, V^{1-\delta})$ к некоторой функции v_*. Покажем, что эта предельная функция является искомым решением задачи (3.2.2), (3.2.3) на $\mathbb{R}_+$.

Убедимся, что функция v_* принадлежит пространству $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Из оценки (3.4.20) следует, что при произвольном $T > 0$ последовательности $\{\hat{v}_{m_k}\}$ и $\{\hat{v}'_{m_k}\}$ ограничены в $L_\infty(0, T; V^3)$, поэтому без ограничения общности можно считать, что они сходятся $*$-слабо в $L_\infty(0, T; V^3)$ соответственно к v_* и некоторой функции $u \in L_\infty(0, T; V^3)$. Однако в смысле распределений на $(0, T)$ со значениями в V^{-3} производные $\{\hat{v}'_{m_k}\}$ сходятся к v'_*, поэтому $u = v'_*$. Таким образом, функция v_* принадлежит пространству $L_\infty(0, T; V^3)$ вместе со своей производной. Отсюда следует, что функция v_* представима в виде интеграла с переменным верхним пределом и потому непрерывна со значениями в V^3. Следовательно, v_* принадлежит $W_2[0, T]$. Это верно для любого T, так что v_* принадлежит $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, что и требовалось.

Из сходимости в $C([0, T], V^{1-\delta})$ следует поточечная сходимость. Так как все функции $\{\hat{v}_{m_k}\}$ удовлетворяют одному и тому же начальному условию и последовательность $\{\hat{v}_{m_k}\}$ сходится поточечно, то v_* тоже удовлетворяет начальному условию (3.2.3). Остаётся проверить, что эта функция является решением уравнения (3.2.2). Для этого нужно установить, что ограничение v_* на всякий отрезок $[0, T]$ $(T > 0)$ является решением уравнения (3.2.2) на этом отрезке.

Из сходимости последовательности $\{\hat{v}_{m_k}\}$ к v_* в $C(\mathbb{R}_+, V^0)$ следует сходимость ограничений $\{\hat{v}_{m_k}\}$ к v_* в $C([0, T], V^0)$. Начиная с некоторого номера функции $\hat{v}_{m_k}$ являются решениями уравнения (3.2.2), то есть удовлетворяют следующему равенству:

$$(J+\varkappa A)\hat{v}'_{m_k}+\nu A\hat{v}_{m_k}+\varepsilon N\hat{v}'_{m_k}-B_1(\hat{v}_{m_k})-\varkappa B_2(\hat{v}_{m_k})-\varkappa B_3(\hat{v}_{m_k})+2\varkappa D(\hat{v}_{m_k}) = f. \tag{3.4.21}$$

Из неравенства (3.4.20) следует, что последовательность $\{\hat{v}_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0, T; V^1)$, а последовательность производных $\{\hat{v}'_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0, T; V^{-1})$ и $L_\infty(0, T; V^3)$, то есть выполнены условия леммы 3.4.1. Согласно этой лемме, без ограничения общности можно считать, что (3.4.21)

сходится к следующему тождеству

$$(J+\varkappa A)v_*' + \nu A v_* + \varepsilon N v_*' - B_1(v_*) - \varkappa B_2(v_*) - \varkappa B_3(v_*) + 2\varkappa D(v_*) = f$$

в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^{-3}. При этом равенство для предельной функции v_* выполнено в смысле $L_\infty(0,T;V^{-3})$. Это и означает, что v_* является решением уравнения (3.2.2) на $[0,T]$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3.1.5. Поскольку V^3 плотно вложено в V^1, найдётся последовательность $\{b_m\} \subset V^3$, такая что $\|b_m - a\|_1 \to 0$. Пусть последовательность $\{\varepsilon_m\}$ такова, что $\varepsilon_m \to 0$ и

$$\varepsilon_m \|b_m\|_3^2 \leqslant 1, \tag{3.4.22}$$

для чего достаточно положить

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m \max\{\|b_m\|_3^2, 1\}}.$$

По теореме 3.4.1 существуют решения v_m уравнения (3.2.2) на $\mathbb{R}_+$ с $\varepsilon = \varepsilon_m$, удовлетворяющие начальному условию

$$v_m(0) = b_m.$$

Из неравенств (3.4.1) и (3.4.22) следует оценка

$$\|v_m(t)\|_1 + \|v_m'(t)\|_{-1} + \varepsilon_m e^{-\alpha t}\|v_m'(t)\|_3 \leqslant R_2\left(1 + \left(\|a_m\|_1^2 + 1\right)e^{-\alpha t}\right), \tag{3.4.23}$$

выполняющаяся почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Более точно, при каждом m это неравенство выполняется при всех $t \in \mathbb{R}_+ \setminus Q_m$, где Q_m — некоторое множество меры 0. Поэтому при всех $t \in \mathbb{R}_+ \setminus Q$, где $Q = \cup_m Q_m$ — множество меры 0, данное неравенство выполняется для *каждого* m.

Пусть $0 < \delta \leqslant 1$. Из неравенства (3.4.23) следует, что при любом $T > 0$ последовательность $\{v_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$, а последовательность $\{v_m'\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^{-1})$. Из теоремы 3.1.3 следует, что последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна в пространстве $C([0,T];V^{1-\delta})$. В силу произвольности T отсюда следует, что эта последовательность относительно

компактна в $C(\mathbb{R}_+, V^{1-\delta})$, и существует подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, которая сходится в $C(\mathbb{R}_+, V^{1-\delta})$ к некоторой функции v_*. Покажем, что v_* является решением задачи (3.1.5), (3.1.6).

Сначала заметим, что v_* принадлежит пространству $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. В самом деле, из оценки (3.4.23) следует, что при произвольном $T > 0$ последовательности $\{v_{m_k}\}$ и $\{v'_{m_k}\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;V^1)$, $L_\infty(0,T;V^{-1})$. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что последовательность $\{v_{m_k}\}$ сходится $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^1)$ к v_*. Аналогично, без ограничения общности, можно считать, что последовательность $\{v'_{m_k}\}$ сходится $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^{-1})$ к некоторой функции $u \in L_\infty(0,T;V^{-1})$. Однако, в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^{-3} последовательность $\{\hat{v}'_m\}$ сходится к v'_*, поэтому $u = v'_*$. Таким образом, функция v_* принадлежит пространству $L_\infty(0,T;V^1)$, а ее производная — пространству $L_\infty(0,T;V^{-1})$, то есть $v_* \in W_1[0,T]$. Поскольку это верно для любого T, то v_* принадлежит $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, что и требовалось.

Покажем, что для v_* выполняется начальное условие (3.1.6). Из сходимости в $C(\mathbb{R}_+, V^{1-\delta})$ следует поточечная сходимость, поэтому

$$b_{m_k} = v_{m_k}(0) \to v_*(0) \qquad \text{в } V^{1-\delta}.$$

Однако, в силу нашего выбора последовательности $\{b_m\}$ мы имеем, что $b_{m_k} \to a$ в V^1, поэтому $v_*(0) = a$, то есть начальное условие удовлетворяется.

Проверим, что функция v_* является решением уравнения (3.1.5) на $\mathbb{R}_+$. Для этого нужно установить, что ограничение v_* на всякий отрезок $[0,T]$ $(T > 0)$ является решением уравнения (3.1.5) на этом отрезке.

Из сходимости последовательности $\{\hat{v}_{m_k}\}$ к v_* в $C(\mathbb{R}_+, V^{1-\delta})$ следует сходимость ограничений $\{v_{m_k}\}$ к v_* в $C([0,T], V^{1-\delta})$. Функции v_{m_k} являются решениями уравнения (3.2.2), то есть

$$(I+\varkappa A)\hat{v}'_{m_k}+\nu A\hat{v}_{m_k}+\varepsilon_{m_k}N\hat{v}'_{m_k}-B_1(\hat{v}_{m_k})-\varkappa B_2(\hat{v}_{m_k})-\varkappa B_3(\hat{v}_{m_k})+2\varkappa D(\hat{v}_{m_k}) = f. \tag{3.4.24}$$

Из неравенства (3.4.23) следует, что последовательность $\{v_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$, а последовательность производных $\{v'_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^{-1})$, при этом последовательность $\varepsilon_m v'$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^3)$

и в силу нашего выбора $\varepsilon_m \to 0$. Поэтому по лемме 3.4.1 без ограничения общности можно считать, что (3.4.24) сходится к следующему тождеству

$$(I + \varkappa A)v_*' + \nu A v_* - B_1(v_*) - \varkappa B_2(v_*) - \varkappa B_3(v_*) + 2\varkappa D(v_*) = f$$

в смысле распределений на $(0, T)$ со значениями в V^{-3}. При этом равенство для предельной функции v_* выполнено в смысле $L_\infty(0, T; V^{-3})$. Это значит, что функция v_* является решением уравнения (3.1.5) на $[0, T]$, что и требовалось.

Покажем, как получить неравенство (3.1.7). Сначала отбросим неотрицательные слагаемые в левой части (3.4.23) и получим неравенство

$$\|v_{m_k}(t)\|_1 \leqslant R_2 \left(1 + \left(\|a_m\|_1^2 + 1\right) e^{-\alpha t}\right). \tag{3.4.25}$$

Это неравенство выполняется для каждого k при всех t, принадлежащих некоторому (не зависящему от k) подмножеству $\mathbb{R}_+$ полной меры. Возьмём некоторое такое t. Прежде всего отметим, что $v_{m_k}(t) \to v_*(t)$ в $V^{1-\delta}$, так как из сходимости в $C(\mathbb{R}_+, V^{1-\delta})$ следует поточечная. Далее, из неравенства (3.4.25) следует, что последовательность $\{v_{m_k}(t)\}$ ограничена в V^1. Следовательно, она содержит подпоследовательность $\tilde{v}_\mu(t)$, слабо сходящуюся в V^1 к $v_*(t)$. Поэтому

$$\|v_*(t)\|_1 \leqslant \varliminf_{\mu\to\infty} \|\tilde{v}_\mu(t)\|_1 \leqslant R_2 \left(1 + \left(\|a\|_1^2 + 1\right) e^{-\alpha t}\right)$$

Таким образом, для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\|v_*(t)\|_1 \leqslant R_2 \left(1 + \left(\|a\|_1^2 + 1\right) e^{-\alpha t}\right). \tag{3.4.26}$$

Оценим теперь значение производной $v_*'(t)$. Так как функция v_*' удовлетворяет уравнению (3.1.5), то имеет место равенство

$$(J + \varkappa A)v_*' = f - \nu A v_* + B_1(v_*) + \varkappa B_2(v_*) + \varkappa B_3(v_*) - 2\varkappa D(v_*).$$

По теореме 3.3.2 правая часть этого тождества допускает оценку

$$\|f - \nu A v_*(t) + B_1(v_*(t)) + \varkappa B_2(v_*(t)) + \varkappa B_3(v_*(t)) - 2\varkappa D(v_*)\|_{-3} \leqslant$$
$$\leqslant C_{15} \left(1 + \|v_*(t)\|_1^2\right),$$

откуда

$$\|(J+\varkappa A)v_*'(t)\|_{-3} \leqslant C_{15}\left(1+\|v_*(t)\|_1^2\right).$$

В силу неравенства (3.2.9) имеем

$$C_0\|v'(t)\|_{-1} \leqslant \|(J+\varkappa A)v'(t)\|_{V^{-3}}.$$

Таким образом получили, что

$$\|v_*'(t)\|_{-1} \leqslant \frac{C_{15}}{C_0}\left(1+\|v_*(t)\|_1^2\right).$$

Наконец, окончательно с учетом (3.4.26)

$$\|v_*'(t)\|_{-1} \leqslant C_{25}\left(1+\left(\|a\|_1^2+1\right)e^{-\alpha t}\right).$$

Складывая эту оценку с (3.4.26), получаем оценку, которая может быть записана в виде (3.1.7). □

3.5 Доказательство теорем 3.1.6 и 3.1.7.

Зададим число $0<\delta<1$, которое будем считать фиксированным в настоящем пункте.

В качестве двух банаховых пространств, необходимых для определения пространства траекторий, рассматриваются $E=V^1$ и $E_0=V^{1-\delta}$ (это можно сделать, так как пространство V^1 рефлексивно и непрерывно вложено в $V^{1-\delta}$).

Согласно замечанию 3.1.3 пространство траекторий, введённое определением 3.1.6, непусто. Следовательно, для обоснования корректности определения достаточно проверить включение

$$\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+;E_0)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E).$$

Включение $\mathcal{H}^+ \subset L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ непосредственно следует из определения пространства траекторий. Чтобы доказать непрерывность траекторий, воспользуемся теоремой 3.1.3 для тройки пространств $V^1\subset V^{1-\delta}\subset V^{-1}$. Из неравенства (3.1.8) следует, что если v — некоторая траектория, то на произвольном отрезке $[0,T]$ имеем $v\in L_\infty(0,T;V^1)$, $v'\in L_\infty(0,T;V^{-1})$, поэтому из

теоремы 3.1.3 следует, что v принадлежит пространству $C([0,T];V^{1-\delta})$. Это верно при любом T, так что $v \in C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$, что и требовалось доказать.

Пусть $\tilde{R} \geqslant 4R_0$. Рассмотрим множество

$$\tilde{P} = \{v \in C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)\colon v' \in L_\infty(\mathbb{R}_+,V^{-1}),$$
$$\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} + \|v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^{-1})} \leqslant \tilde{R}\}. \quad (3.5.1)$$

Установим некоторые свойства этого множества.

Лемма 3.5.1. *Множество $\tilde{P}$ ограниченно в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$, компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$, и имеет место включение*

$$\mathrm{T}(h)\tilde{P} \subset \tilde{P} \quad (h \geqslant 0). \quad (3.5.2)$$

Доказательство. Ограниченность множества $\tilde{P}$ в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$ следует из самого определения этого множества.

Легко видеть, что множество $\tilde{P}$ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$. Действительно, из его определения ясно, что при любом $T > 0$ множество $\tilde{P}$ ограничено в норме $L_\infty(0,T;V^1)$, а множество $\{v'\colon v \in \tilde{P}\}$ ограничено в норме $L_\infty(0,T;V^{-1})$. Отсюда по теореме 3.1.3 следует, что множество $\tilde{P}$ относительно компактно в $C([0,T];V^{1-\delta})$. В силу произвольности T получаем относительную компактность множества $\tilde{P}$ в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$.

Покажем, что множество $\tilde{P}$ замкнуто в пространстве $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$ и, следовательно, компактно в этом пространстве. Пусть последовательность $\{v_m\} \subset \tilde{P}$ сходится к v_0 в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$. В силу ограниченности этой последовательности в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$ она сходится к своей предельной функции $*$-слабо в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$. Аналогичным образом, последовательность производных $\{v_m'\}$ сходится к v_0' в смысле распределений, а будучи ограниченной в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^{-1})$, она сходится к v_0' также $*$-слабо в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^{-1})$, поэтому

$$\|v_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} + \|v_0'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^{-1})} \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \|v_m\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} + \varliminf_{m\to\infty} \|v_m'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant \varliminf_{m\to\infty} \left(\|v_m\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} + \|v_m'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^{-1})}\right) \leqslant \tilde{R}.$$

Таким образом, предельная функция v_0 принадлежит множеству $\tilde{P}$, что доказывает компактность последнего.

Теперь установим включение (3.5.2). Пусть $h \geqslant 0$. Для всякого $v \in \tilde{P}$ имеем

$$\|\mathrm{T}(h)v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} + \|\mathrm{T}(h)v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^{-1})} \leqslant \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} + \|v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^{-1})} \leqslant \tilde{R},$$

то есть $\mathrm{T}(h)v \in \tilde{P}$, что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 3.1.6. Покажем, что множество $\tilde{P}$ является полуаттрактором траекторного пространства $\mathcal{H}^+$. Из леммы 3.5.1 следует, что для множества $\tilde{P}$ выполнены условия (i) и (ii) определения 3.1.1. Покажем, что это множество является поглощающим. Рассмотрим произвольное множество $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$; пусть для определённости $\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \leqslant R$ для всех $v \in B$. Выберем такое $h_0 \geqslant 0$, что $R^2 e^{-\alpha h_0} \leqslant 1$. Пусть v — произвольная функция из B. Так как v удовлетворяет неравенству (3.1.8), то при $h \geqslant h_0$ имеем

$$\|\mathrm{T}(h)v(t)\|_1 + \|\mathrm{T}(h)v'(t)\|_{-1} = \|v(t+h)\|_1 + \|v'(t+h)\|_{-1} \leqslant$$
$$\leqslant R_0(1 + R^2 e^{-\alpha(t+h)}) \leqslant R_0(1 + R^2 e^{-\alpha h_0}) \leqslant 2R_0.$$

Отсюда следует, что $\|\mathrm{T}(h)v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \leqslant 2R_0$, $\|\mathrm{T}(h)v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^{-1})} \leqslant 2R_0$, и поэтому

$$\|\mathrm{T}(h)v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} + \|\mathrm{T}(h)v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^{-1})} \leqslant 4R_0 \leqslant \tilde{R}.$$

Таким образом, $\mathrm{T}(h)v \in \tilde{P}$. В силу произвольности v получаем, что $\mathrm{T}(h)B \subset \tilde{P}$ при всех $h \geqslant h_0$. Следовательно, $\tilde{P}$ — поглощающее множество.

Таким образом, $\tilde{P}$ — полуаттрактор пространства $\mathcal{H}^+$. По теореме 3.1.1 пространство траекторий $\mathcal{H}^+$ имеет минимальный траекторный аттрактор. □

Доказательство теоремы 3.1.7. Согласно теореме 3.1.2 достаточным условием существования глобального аттрактора пространства траекторий является существование минимального траекторного аттрактора этого пространства. Последнее же утверждается теоремой 3.1.6. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Список использованных источников

1. Амфилохиев В. Б. Течение полимерных растворой при наличии конвективных ускорений / В. Б. Амфилохиев, Я. И. Войткунский, Н. П. Мазаева, Я. С. Ходорновский // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного иститута. – 1975. – Т. 96. – С. 3–9. 8

2. Борисович Ю. Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: УРСС: Либроком, 2011. – 224 с. 33, 93

3. Ворович И. И. Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости / И. И. Ворович, В. И. Юдович // Математический сборник. – 1961. – Т. 53, № 4. – С. 393–428. 61

4. Гольдштейн Р. В. Механика сплошных сред. Часть I / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов. – Наука. Физматлит, 2000. – 256 с. 7

5. Звягин В. Г. Аттракторы для уравнений моделей движения вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев. – Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – 266 с. 102, 107

6. Звягин В. Г. Исследование начально–краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта / В. Г. Звягин, М. В. Турбин // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009.– Т. 31. – С. 3–144. 9

7. Звягин В. Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. – М.: УРСС: КРАСАНД, 2012. – 416 с. 9, 61, 66, 107, 114

8. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с. 6, 28, 50, 60

9. Ладыженская О. А. О погрешностях в двух моих публикациях по уравнениям Навье–Стокса и их исправлениях / О. А. Ладыженская // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2000. – Т. 271. – С. 151–155. 9

10. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж. Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с. 6

11. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа. / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с. 30

12. Осколков А. П. О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1975. – Т. 52. – С. 128–157. 9

13. Павловский В. А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В. А. Павловский // ДАН СССР. – 1971. – Т. 200, № 4. – С. 809–812. 8

14. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с. 6, 17, 60, 62, 102

15. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга (Университетская серия Т. 5), 1999. –352 с. 10, 61

16. Chepyzhov V. V. Attractors for equations of mathematical physics / V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik. – Providence. RI: AMS Colloquium Publications, 2002. – 363 p. 10

17. Cioranescu D. Weak and classical solutions of a family of second grade fluids / D. Cioranescu, V. Girault // International Journal of Non–Linear Mechanics. – 1997. – V. 32. – P. 317–335. 10

18. Galdi G. P. Existence and uniqueness of classical solutions of the equations of motion for second–grade fluids / G. P. Galdi, M. Grobbelaar–Van Dalsen, N. Sauer // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1993. – V. 124. – P. 221–237. 10

19. Guillope C. Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law / C. Guillope, J. C. Saut // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 1990. – V. 15, № 9. – P. 849–869. 9

20. Guillope C. Mathematical problems arising in differential models for viscoelastic fluids / C. Guillope, J. C. Saut // Mathematical topics in fluid mechanics / J. F. Rodrigues, A. Sequeira (eds). – Pitman Research Notes in Mathematics Series V. 274.: Longman Scientific and Technical, Harlow, 1992. – P. 64–92. 9

21. Kamenskii M. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. – De Gruyter Series In Nonlinear Analysis and Applications V. 7. Walter de Gruyter, 2001. – 231 p. 33

22. Leray J. Etude de diverses equations integrales nonlineaires et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique / J. Leray // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées – 1933. – V. 12. – P. 1–82. 6

23. Lions P. L. Global solutions for some Oldroyd models of non–Newtonian flows / P. L. Lions, N. Masmoudi // Chinese Annals of Mathematics. Series B. – 2000. – V. 21, № 2. – P. 131–146. 9

24. Obukhovskii V. V. Optimal feedback control in the problem of the motion of a viscoelastic fluid / V. V. Obukhovskii, P. Zecca, V. G. Zvyagin // Topological Methods in Nonlinear Analysis – 2004. – V. 23. – P. 323–337. 10

25. Sell G. R. Dynamics of Evolutionary Equations / G. R. Sell, Y. You. – New York: Springer, 1998. – 670 p. 10

26. Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ / J. Simon // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1987. – V. 146. – P. 65–96. 69

27. Zvyagin V. G. Weak Solutions and Attractors for Motion Equations for an Objective Model of Viscoelastic Medium / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – № 7. – P. 1060105–1060106. 9

28. Zvyagin V. G. Approximating–topological methods in some problems of hydrodinamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov // Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2008. – V. 3, № 1. – P. 23–49. 101

29. Zvyagin V. G. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov. – De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications V. 12. Walter de Gruyter, 2008. – 230 p. 11

Публикации автора по теме диссертации

30. Звягин А. В. О разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 2. – С. 103–105. 13

31. Звягин А. В. Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С. 147–156.

32. Звягин А. В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А. В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. – 2012. – № 2. – С. 118–121.

33. Звягин А. В. Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 2. – С. 245–249.

34. Zvyagin A. V. Optimal feedback control in the stationary mathematical model of low concentrated aqueous polymer solutions / A. V. Zvyagin // Applicable Analysis. – 2013. – V. 92, № 6. – P. 1157–1168.

35. Звягин А. В. Задача оптимального управления с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов с объективной производной / А. В. Звягин // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 807–825.

36. Zvyagin A. V. Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative / A. V. Zvyagin // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2013. – V. 90. – P. 70–85. 13

37. Звягин А. В. Оптимальное управление с обратной связью для одной стационарной модели движения жидкости с объективной производной / А. В. Звягин // Spectral and Evolution Problems. – 2013. – Т. 23. – С. 91–102.

38. Звягин А. В. Аттракторы для модели движения полимеров с объективной производной в реологическом соотношении / А. В. Звягин // Доклады Академии Наук. – 2013. – Т. 453, № 6. – С. 599–602. 13

39. Zvyagin A. V. Solvability of the stationary mathematical model of one non-Newtonian fluid motion with the objective derivative / A. V. Zvyagin // Fixed point theory. An International Journal on Fixed Point Theory, Computation and Applications. – 2014. – V. 15, № 2. – P. 623–634. 13